

## תרגיל 8

להגשה עד 16.1.17

### שאלה 1

הוכיחו כי הפונקציות הרציפות צפופות ב  $L^1(\mathbb{R})$ . כלומר: אם  $f \in L^1(\mathbb{R})$  אזי לכל  $\epsilon > 0$  קיימת  $g$  רציפה כך ש  $\|f - g\|_{L^1} < \epsilon$ .

### שאלה 2

יהי  $(\mathbb{R}^2, \mathbf{B}(\mathbb{R}^2))$  המרחב המדיד של המישור עם  $\sigma$  אלגברה בורל. נגדיר את הפונקציה

$$f(x, y) := \begin{cases} 1 & 0 \leq x \text{ and } x \leq y < x + 1 \\ -1 & 0 \leq x \text{ and } x + 1 \leq y < x + 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

הראו כי  $\int \int f(x, y) dm(x) dm(y) \neq \int \int f(x, y) dm(y) dm(x)$ . מדוע אין זו סתירה למשפט פוביני?

### שאלה 3

הוכיחו כי:  $I := \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dm(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

הדרכה: חשבו קודם את  $I^2$  ע"י מעבר לקואורדינטות פולריות.

### שאלה 4

חשבו:

$$\int_0^1 \int_0^\infty \frac{y \arctan(xy)}{(1+x^2y^2)(1+y^2)} dy dx$$

### שאלה 5

תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  מדידה לבג. הוכיחו את השוויון:

$$\int_{-\infty}^\infty |f(x)| dm(x) = \int_0^\infty m(\{x : |f(x)| \geq t\}) dm(t)$$

## שאלה 6

תהי  $\mu$  מידה סופית על  $\mathbb{R}$ . נגדיר  $\alpha(x) = \mu((-\infty, x])$ . הוכיחו כי:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\alpha(x+c) - \alpha(x)] dm(x) = c\mu(\mathbb{R})$$

**בהצלחה!!**