

מבחן דמה – 89-133-01/02 אינפי 2

מרצים: דר' שמעון ברוקס ודר' ארז שיינר. חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.

משקל כל שאלה 16 נק', ענו על כל השאלות. משך המבחן: שלוש שעות.

1. חשבו את האינטגרלים הלא מסויימים הבאים:

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin^4(x) + \sin^2(x)} dx \quad \text{א.} \quad \int \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} dx \quad \text{ב.}$$

2. קבעו לכל אינטגרל האם הוא מתכנס:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x) dx \quad \text{ב.} \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{e^x \ln(x)} dx \quad \text{א.}$$

3. תהי פונקצית דיריכלה $D(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ ותהי f פונקציה כלשהי המקיימת

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(D(x))$$

הוכיחו/הפריכו: f אינטגרבילית בקטע $[a, b]$.

4.

$$\text{א. הוכיחו כי לכל } x \in (-1, 1) \text{ מתקיים } \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$\text{ב. הוכיחו כי לכל } x \in (-1, 1) \text{ מתקיים } \left(\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}$$

5. תהי $f_n(x)$ סדרת פונקציות גזירות המתכנסות בקטע הסגור $[a, b]$ לפונקציה הגבול הגזירה $f(x)$.

נניח כי לכל n ולכל $x \in [a, b]$ מתקיים $f_n'(x) > f'(x)$, הוכיחו כי $f_n(x) \rightarrow f(x)$ במ"ש ב $[a, b]$.

6. יהי טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ בעל רדיוס התכנסות $R = \infty$, ונתון כי $a_1 \neq 0$.

נגדיר פונקציה $f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (xy)^n$. הוכיחו כי ל f יש נק' קריטית $(0, 0)$ ומצאו את סוגה (מקס', מינ' או אוקף).

7. מצאו את הערך המקסימלי והערך המינימלי של הפונקציה $f(x, y) = x + y$

$$\text{בתחום } \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2\}$$