פתרון תרגיל 5 – מבוא לאנליזה 1

1. בפתרון שאלה זו ניעזר במשפט הבא: אם $a_n \to \infty$ ו־$x \in \mathbb{R}$, אז $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{a_n}\right)^{a_n} = e^x$.

(א)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{7}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{7}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{7}{n}\right) = e^7\cdot 1 = e^7$$

(ב)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1+2}{n+1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{2n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}\right]^2\cdot\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{-2} = (e^2)^2\cdot 1^{-2} = e^4$$

(ג)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7+3n}{9+3n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{9+3n-2}{9+3n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{9+3n}\right)^{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{2}{9+3n}\right)^{9+3n}\right]^{\frac{1}{3}}\cdot\left(1-\frac{2}{9+3n}\right)^{-3} = \left(e^{-2}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot 1^{-3} = e^{-\frac{2}{3}}$$

(ד)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2}{n^2-3}\right)^{4n^2-1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3+1}{n^2-3}\right)^{4n^2-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2-3}\right)^{4n^2-1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2-3}\right)^{n^2-3}\right]^4\cdot\left(1+\frac{1}{n^2-3}\right)^{11} = e^4\cdot 1^{11} = e^4$$

2. לפי אי־שוויון המשולש, לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$|a_n| = |2+3\cdot cos(n)| \le 2+3\cdot|cos(n)| \le 2+3 = 5$$

כלומר הסדרה $\{a_n\}$ **חסומה**, ולכן לפי משפט בולצאנו־ויירשטראס יש לה תת־סדרה המתכנסת לגבול סופי.

3. (א) נתונה הסדרה $a_n = 3 + (-1)^n + \frac{1}{n^2}$.

עבור תת־הסדרה של האיברים במקומות הזוגיים מתקיים

$$a_{2k} = 3 + (-1)^{2k} + \frac{1}{(2k)^2} = 3 + 1 + \frac{1}{4k^2} = 4 + \frac{1}{4k^2} \to \mathbf{4}$$

ולכן 4 הוא גבול חלקי של $\{a_n\}$.

עבור תת־הסדרה של האיברים במקומות האי־זוגיים נקבל

$$a_{2k-1} = 3 + (-1)^{2k-1} + \frac{1}{(2k-1)^2} = 3 - 1 + \frac{1}{(2k-1)^2} = 2 + \frac{1}{(2k-1)^2} \to \mathbf{2}$$

ולכן גם 2 הוא גבול חלקי של $\{a_n\}$, כדרוש.

(ב) נתונה הסדרה $a_n = 2 \cdot (-1)^n + \frac{3n}{n+1}$.

עבור תת־הסדרה של האיברים במקומות הזוגיים מתקיים

$$a_{2k} = 2 \cdot (-1)^{2k} + \frac{3 \cdot 2k}{2k+1} = 2 + \frac{6k}{2k+1} \to \mathbf{2 + 3 = 5}$$

ולכן 5 הוא גבול חלקי של $\{a_n\}$.

עבור תת־הסדרה של האיברים במקומות האי־זוגיים מתקיים

$$a_{2k-1} = 2 \cdot (-1)^{2k-1} + \frac{3 \cdot (2k-1)}{2k-1+1} = -2 + \frac{6k-3}{2k} = -2 + 3 - \frac{3}{2k} = 1 - \frac{3}{2k} \to \mathbf{1}$$

ולכן גם 1 הוא גבול חלקי של $\{a_n\}$. כיוון שמדובר בשתי תתי־הסדרות של האיברים במקומות הזוגיים והאיברים במקומות הזוגיים, אין עוד גבולות חלקיים [לפי הנימוק שראינו בתרגול – אם היה גבול חלקי נוסף L, אז הייתה תת־סדרה $\{a_{n_k}\}$ שמתכנסת אליו. אפשר למצוא לה תת־סדרה שכל האינדקסים שלה זוגיים (או אי־זוגיים), ואז היא בפרט תת־סדרה של $\{a_{2k}\}$ (וככזו מתכנסת ל־5), או תת־סדרה של $\{a_{2k-1}\}$ (וככזו מתכנסת ל־1). כיוון שזו גם תת־סדרה של $\{a_{n_k}\}$ שמתכנסת ל־L, בהכרח $L = 5$ או $L = 1$].

4.

(א) נתון כי לסדרה $a_n = sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ יש 3 גבולות חלקיים. אפשר לחשב תחילה מס' איברים ראשונים:

$$a_1 = sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad , \quad a_2 = sin\left(\frac{2\pi}{2}\right) = sin(\pi) = 0$$

$$a_3 = sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 \quad , \quad a_4 = sin\left(\frac{4\pi}{2}\right) = sin(2\pi) = 0$$

$$a_5 = sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = 1 \quad , \quad a_6 = sin\left(\frac{6\pi}{2}\right) = sin(3\pi) = 0$$

$$a_7 = sin\left(\frac{7\pi}{2}\right) = sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi\right) = -1 \quad , \quad a_8 = sin\left(\frac{8\pi}{2}\right) = sin(4\pi) = 0$$

ולכן נתמקד ב־3 תתי־הסדרות הבאות:

תת־הסדרה של האיברים במקומות הזוגיים:

$$a_{2k} = sin\left(\frac{2\pi k}{2}\right) = sin(\pi k) = 0 \to 0$$

תת־הסדרה המתקבלת כאשר $n_k = 4k-3$ (כלומר $a_1, a_{5,} a_9, a_{13}, \ldots$):

$$a_{4k-3} = sin\left(\frac{(4k-3)\pi}{2}\right) = sin\left(-\frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right) = sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \to 1$$

ותת־הסדרה המתקבלת כאשר $n_k = 4k-1$ (כלומר $a_3, a_7 a_{11}, a_{15}, \ldots$):

$$a_{4k-1} = sin\left(\frac{(4k-1)\pi}{2}\right) = sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \to -1$$

ומכאן שהגבולות החלקיים של $\{a_n\}$ הם: $\mathbf{1,\ 0,\ -1}$.

(ב) נשים לב ש

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot sin(\frac{n\pi}{2}) = 0$$

כי זו מכפלה של סדרה חסומה $sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ בסדרה $\frac{1}{n}$ השואפת ל־0. לכן הסדרה $\{a_n\}$ **מתכנסת**, ולכן לפי משפט יש לה גבול חלקי **יחיד** (שהוא 0).

5. **לא קיימת** סדרה $\{a_n\}$ כך שתת־הסדרה $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת ל־0, ותת־הסדרה $\{a_{3k}\}_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת ל־1. נניח בשלילה שיש סדרה כזאת. נתבונן בתת־הסדרה הבאה שלה, $\{a_{6k}\}_{k=1}^{\infty}$. מצד אחד זוהי תת־סדרה של $\{a_{2k}\}$ (אכן, $a_6, a_{12}, a_{18}, \ldots$ היא תת־סדרה של $a_2, a_4, a_6, a_8 \ldots$), וכיוון ש־$a_{2k} \to 0$ אז גם $\boldsymbol{a_{6k} \to 0}$ (כי אם סדרה מתכנסת לגבול, אז גם כל תת־סדרה שלה מתכנסת לאותו גבול). מצד שני זוהי תת־סדרה של $\{a_{3k}\}$ (אכן, $a_6, a_{12}, a_{18}, \ldots$ היא תת־סדרה של $a_3, a_6, a_9, a_{12}, \ldots$), וכיוון ש־$a_{3k} \to 1$ אז גם $\boldsymbol{a_{6k} \to 1}$, בסתירה לכך ש־$a_{6k} \to 0$.