פתרון תרגיל 9

1. א. ההוצאה נעשית עם החזרה.

I	1	2	3
P(X=I)	1/2	1/4	1/4

S	1	4	9
$P(X^2=S)$	1/2	1/4	1/4

אז Y,X בלתי תלויים ושווי התפלגות.

$$E[X]=E[Y]=1*\tfrac{1}{2}+2*\tfrac{1}{4}+3*\tfrac{1}{4}=1.75$$
$$E[X+Y]=E[X]+E[Y]=2*1.75=3.5$$
$$E[X^2]=1*\tfrac{1}{2}+4*\tfrac{1}{4}+9*\tfrac{1}{4}=3.75=E[Y^2]$$
$$Var[X]=Var[Y]=E[X^2]-\left(E[X]\right)^2=3.75-1.75^2=0.6875$$
$$Var[X+Y]=Var[X]+Var[Y]=2*0.6875=1.375$$

ב. ההוצאה בלי החזרה.

X\Y	1	2	3	P(Y)
1	1/6	1/6	1/6	1/2
2	1/6	0	1/12	1/4
3	1/6	1/12	0	1/4
P(X)	1/2	1/4	1/4	1

S	2	3	4	5	6
P(X+Y=S)	1/6	1/3	1/3	1/6	0

$$E[X]=E[Y]=1*\tfrac{1}{2}+2*\tfrac{1}{4}+3*\tfrac{1}{4}=1.75$$
$$E[X+Y]=E[X]+E[Y]=2*1.75=3.5$$
$$E[X^2]=1*\tfrac{1}{2}+4*\tfrac{1}{4}+9*\tfrac{1}{4}=3.75=E[Y^2]$$
$$Var[X]=Var[Y]=E[X^2]-\left(E[X]\right)^2=3.75-1.75^2=0.6875$$
$$E[X+Y]=2*\tfrac{1}{6}+3*\tfrac{1}{3}+4*\tfrac{1}{3}+5*\tfrac{1}{6}=3.5$$
$$E[(X+Y)^2]=4*\tfrac{1}{6}+9*\tfrac{1}{3}+16*\tfrac{1}{3}+25*\tfrac{1}{6}=13\tfrac{1}{6}$$
$$Var(X+Y)=E[(X+Y)^2]-(E[X+Y])^2=0.9166$$

2. אם Y,X בלתי תלויים ומשתנים מקריים אינדיקטוריים (שימו לב - אם הם לא היו 0,1, אז התנאי הנ"ל לא היה שקול לאי תלות), אז אי תלות משמעה - $P(X=i,Y=j)=P(X=i)*P(Y=j)$

$$P(X=0,Y=0)=P(X=0)*P(Y=0)\Leftrightarrow a=(a+b)*(a+c)=$$
$$a^2+ab+ac+bc\Leftrightarrow a*(1-a-b-c)=bc\Leftrightarrow ad=bc$$
$$P(X=0,Y=1)=P(X=0)*P(Y=1)\Leftrightarrow c=(a+c)*(c+d)=$$
$$c^2+ad+cd+ac\Leftrightarrow ad=c*(1-a-c-d)\Leftrightarrow ad=bc$$
$$P(X=1,Y=0)=P(X=1)*P(Y=0)\Leftrightarrow b=(a+b)*(b+d)=$$
$$b^2+ab+ad+bd\Leftrightarrow ad=b*(1-a-b-d)\Leftrightarrow ad=bc$$
$$P(X=1,Y=1)=P(X=1)*P(Y=1)\Leftrightarrow d=(b+d)*(c+d)=$$
$$d^2+bc+bd+cd\Leftrightarrow bc=d*(1-b-c-d)\Leftrightarrow ad=bc$$

ב.

r	0	1
P(XY=r)	a+b+c	d

ג. כבר הוכחנו

X,Y ב"ת $\leftrightarrow$ $ad=bc$

לכן מספיק להוכיח $ad=bc$ $\leftrightarrow$ $E[XY]=E[X]*E[Y]$

$$E[XY]=d\ and\ E[X]=b+d\ and\ E[Y]=c+d$$
$$so\quad E[XY]=E[X]*E[Y]\Leftrightarrow d=(b+d)*(c+d)\Leftrightarrow d=bc+bd+cd+d^2$$
$$\Leftrightarrow d(1-b-c-d)=bc\Leftrightarrow ad=bc$$

3.

W/B	2	3
0	3/10	0
1	2/10	1/10
2	1/10	3/10

r	2	3	4	5
P(B+W=r)	3/10	2/10	2/10	3/10

$$E[B+W]=\frac{1}{10}*(2*3+3*2+4*2+5*3)=3.5$$

4. א. X סכום התוצאות כאמור.

S	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
P(X=S)	$\frac{1}{216}$	$\frac{3}{216}$	$\frac{6}{216}$	$\frac{10}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{21}{216}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{27}{216}$	$\frac{27}{216}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{21}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{10}{216}$	$\frac{6}{216}$	$\frac{3}{216}$	$\frac{1}{216}$

$$E[X]=\sum_s s*P(X=s)={}^{2268}\!/_{216}=10.5$$

$$E[X^2]=\sum_s s^2*P(X=s)={}^{25704}\!/_{216}=119$$

$$Var(X)=E[X^2]-\left(E[X]\right)^2=8.75$$

ב. אפשר להסתכל על X בתוך $X=X_1+X_2+X_3$, כאשר כל X_i מסמל הטלת הקוביה.
ידוע עליהם שהם ב"ת זהים ולכן $X=3X_1$

I	1	2	3	4	5	6
$P(X_1=i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$$E[X]=E[3X_1]=3*E[X_1]=3*{}^{1}\!/_{6}*({}^{6*7}\!/_{2})=10.5$$

$$E[X_1^2]={}^{1}\!/_{6}*\sum_{i=1}^{6}i^2=15\tfrac{1}{6}$$

$$Var(X_1)=E[X_1^2]-\left(E[X_1]\right)^2=2\tfrac{11}{12}$$

$$Var(X)=Var(3X_1)=3Var(X_1)=3*2\tfrac{11}{12}=8.75$$

5. נסמן ב X ו ב Y בהתאמה, את הזמנים (בדקות) לאחר השעה 12:00 שבהם הגבר והאישה מגיעים לפגישה. X ו Y הם מ"מ ב"ת, בעלי התפלגות אחידה בקטע [0,60].
לכן, ההסתברות המבוקשת היא $P(X+10<Y)+P(Y+10<X)$.
מטעמי סימטריה הסתברות זו שווה ל $2P(X+10<Y)$ והיא מתקבלת כך-

$$2P(X+10<Y)=2\iint_{X+10<Y}f(x,y)dxdy=2\iint_{X+10<Y}f(x)f(y)dxdy=2\int_{10}^{60}\int_{0}^{y-10}(\frac{1}{60})^2dxdy$$

$$=\frac{2}{60^2}\int_{10}^{60}(y-10)dy=\frac{25}{36}$$