הרצאה 1

נכתב על ידי נועם יערי

04.07.2016

הגדרה

משוואה דיפרנציאלית רגילה ממעלה n היא אוסף של הפונקציות המקיימות:

$$F\left(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}\right) = 0$$

כאשר פתרון המשוואה הוא פונקציה $y(x)$ – פונקציה הגזירה לפחות n פעמים.

הגדרה

עבור המשוואה הדיפרנציאלית $F\left(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}\right) = 0$,
משוואה בצורה הבאה נקראת הצורה הנורמלית של המשוואה:

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$$

הגדרה

משוואה דיפרנציאלית נקראת לינארית $\Leftrightarrow$ היא לינארית ביחס ל – y ולכל גזרותיה.

דוגמאות

משוואה לינארית:

$$y' = y + \sin(x)$$

משוואות לא לינאריות:

$$y' = y^2$$

$$y' = \cos(y)$$

$$y \cdot y' = 1$$

הגדרה

בעיית קושי היא משוואה דיפרנציאלית יחד עם תנאי התחלה בנקודה מסויימת:

$$\begin{cases} F\left(x, y, y', \cdots, y^{(n)}\right) = 0 \\ y(x_0) = a_0 \\ y'(x_0) = a_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)} = a_{n-1} \end{cases}$$

הגדרה

נאמר שפונקציה F מקיימת את תנאי ליפשיץ אם ורק אם מתקיים:

$$\exists L \geq 0 : \forall x_1, x_2 \in dom(F): \ |F(x_1) - F(x_2)| \leq L \cdot |x_1 - x_2|$$

נאמר שהפונקציה F היא רציפה פלוס ב – y אם ורק אם היא מקיימת את תנאי ליפשיץ ב – y.

הרצאה 1

נכתב על ידי נועם יערי

משפט קיום ויחידות

תהי בעיית קושי בצורה נורמלית, כלומר:

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$$

כאשר F רציפה בנקודה x ורציפה פלוס בפונקציות $y, y', \cdots, y^{(n-1)}$ ובנוסף יהי תנאי התחלה:

$$\begin{cases} y(x_0) = a_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1} \end{cases}$$

אזי, קיים פתרון אחד ויחיד לבעיית קושי.

הערה

את הוכחת המשפט נראה בהמשך הקורס.

הוכחה בהרצאה 12.