תרגול 9

<u>תזכורת:</u>

$$\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=F(x,t) \\ u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \\ u(0,t)=u(L,t)=0 \end{cases}$$

נפריד את המערכת לשתי מערכות:

$$u=u^h+u^p$$

כאשר:

$$\begin{cases} u^h_{tt}-c^2u^h_{xx}= \\ u^h(x,0)=f(x) \\ u^h_t(x,0)=g(x) \\ u^h(0,t)=u^h(L,t)=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} u^p_{tt}-c^2u^p_{xx}=F(x,t) \\ u^p(x,0)=0 \\ u^p_t(x,0)=0 \\ u^p(0,t)=u^p(L,t)=0 \end{cases}$$

<u>תגלית של פורייה</u>

$$F(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)\cdot k(x)$$

$$u^p=\sum_{n=1}^{\infty} h_n(t)\cdot k(x)$$

כאשר $k(x)$ הן פ"ע לפי x שיוצאות מהחלק ההומוגני u^h (נשים לב כי $u^p\neq F(x,t)$).

את החלק ההומוגני אנו יודעים לפתור ונקבל (תנאי שפה דריכלה):

$$u^h=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right)\right]$$

לכן:

$$F(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$q_n(t)=\frac{2}{L}\int_0^L F(x,t)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

נקבל:

$$\boxed{u^p=\sum_{n=1}^{\infty} h_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}$$

כעת:

1. להציב את תנאי השפה בניחוש. אם הניחוש לא מקיים את תנאי השפה, אז יש טעות.

2. להציב את הניחוש u^p במד"ח ואז יורדים ממד"ח למערכת של n מד"רים מסדר 2 על t.

$$u_{tt}^p = \sum_{n=1}^{\infty} h_n''(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$u_{xx}^p = \sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 h_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

לכן:

$$u_{tt}^p - c^2 u_{xx}^p = \sum_{n=1}^{\infty} \left[h_n''(t) + c^2 \frac{n^2\pi^2}{L^2} h_n(t)\right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = F(x,t)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

נצבע השוואת מקדמים לקבל:

$$\boxed{h_n''(t) + \left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 h_n(t) = q_n(t)}$$

מערכת של אינסוף מד"רים.

<u>תרגיל:</u>

פתרו את המד"ח:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = xt \\ u(x,0) = \sin(4x) \\ u_t(x,0) = \sin(3x) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

<u>פתרון:</u>

נפצל ל – 2 מערכות כמו שרשום בנ"ל:

$$\begin{cases} u_{tt}^h - u_{xx}^h = 0 \\ u^h(x,0) = \sin(4x) \\ u_t^h(x,0) = \sin(3x) \\ u^h(0,t) = u^h(\pi,t) = 0 \end{cases}, \begin{cases} u_{tt}^p - u_{xx}^p = xt \\ u^p(x,0) = 0 \\ u_t^p(x,0) = 0 \\ u^p(0,t) = u^p(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

<u>ראשית נפתור את החלק ההומוגני:</u>

$$u^h = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right)\right]$$

$$u^h = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)\,[A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)]$$

נציב תנאי התחלה:

$$\sin(4x) = u^h(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \underbrace{\sin(nx)}_{\substack{\text{פונקציות עצמיות} \\ \text{ששונות מ-0}}}$$

$$n = 4 : A_4 = 1$$

$$n \neq 4 : A_n = 0$$

תנאי התחלה שני:

$$u_t^h(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} nB_n \sin(nx) = \sin(3x)$$

$$n = 3 : 3B_3 = 1 \Rightarrow B_3 = \frac{1}{3}$$

$$n \neq 3 : B_n = 0$$

לכן:

$$\boxed{u^h(x,t) = \frac{1}{3}\sin(3x)\sin(3t) + \sin(4x)\cos(4t)}$$

נפתור כעת את החלק הפרטי:

$$u^p(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t)\sin(nx)$$

$$xt = F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)\sin(nx)$$

$$q_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xt\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}t\int_0^{L} x\sin(nx)\,dx = \cdots = \frac{2t}{n}(-1)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{xt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t}{n}(-1)^n \sin(nx)}$$

נציב במד"ח:

$$u_{tt}^p = \sum_{n=1}^{\infty} h_n''(t)\sin(nx)$$

$$u_{xx}^p = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 h_n(t)\sin(nx)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}[h_n''(t) + n^2 h_n(t)]\sin(nx) = F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2t}{n}(-1)^n \sin(nx)$$

נצבע השוואת מקדמים ביחס לפונקציות העצמאיות של x:

$$\boxed{h_n''(t) + n^2 h_n(t) = \frac{2t}{n}(-1)^{n+1}}$$

נצטרך גם תנאי התחלה:

$$0 = u^p(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(0)\sin(nx) \Rightarrow \boxed{\forall n : h_n(0) = 0}$$

$$0 = u_t^p(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n'(0)\sin(nx) \Rightarrow \boxed{\forall n : h_n'(0) = 0}$$

נפתור את המד"ר שלנו:

נתחיל מהחלק ההומוגני של המשוואה –

$$h_n''(t) + n^2 h_n(t) = 0$$

$$k^2 + n^2 = 0 \Rightarrow k^2 = -n^2 \Rightarrow k = \pm in$$

לכן:

$$\boxed{h_n^h(t) = C_n\cos(nt) + D_n\sin(nt)}$$

נזכור כי:

$$h_n(t) = h_n^h(t) + h_n^p(t)$$

נחפש פתרון פרטי:

$$h_n^{p\,''}(t) + n^2 h_n^p(t) = \frac{2t}{n}(-1)^{n+1}$$

ננחש פתרון:

$$h_n^p(t) = A_n t + B_n$$

<u>הערה:</u> צריך לוודא שהניחוש לא מוכל בתוך הפתרון הכללי של החלק ההומוגני.

נציב את הניחוש:

$$n^2[A_n t + B_n] = \frac{2t}{n}(-1)^{n+1}$$

$$n^2 A_n t + n^2 B_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1} t$$

לכן:

$$n^2 A_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \Rightarrow A_n = \frac{2}{n^3}(-1)^{n+1}$$

$$B_n = 0$$

לכן קיבלנו:

$$h_n(t) = h_n^h(t) + h_n^p(t) = C_n\cos(nt) + D_n\sin(nt) + \frac{2}{n^3}(-1)^{n+1}t$$

נציב תנאי התחלה:

$$0 = h_n(0) = C_n$$

$$h_n'(t) = nD_n\cos(nt) + \frac{2}{n^3}(-1)^{n+1}$$

$$0 = h_n'(0) = nD_n + \frac{2}{n^3}(-1)^{n+1}$$

$$D_n = \frac{2}{n^4}(-1)^n$$

לכן:

$$\boxed{h_n(t) = \frac{2}{n^4}(-1)n\sin(nt) + \frac{2}{n^3}(-1)^{n+1}t}$$

בסה"כ:

$$u = u^p + u^h = \frac{1}{3}\sin(3x)\sin(3t) + \sin(4x)\cos(4t) + \sum_{n=1}^{\infty}\sin(nx)\left[\frac{2}{n^4}(-1)n\sin(nt) + \frac{2}{n^3}(-1)^{n+1}t\right]$$

■

<u>תרגיל:</u>

תופעת תהודה (רזונס):

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \cos(2\pi x)\cos(2\pi t) \\ u(x,0) = \cos^2(\pi x) \\ u_t(x,0) = 2\cos(2\pi x) \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 \end{cases}$$

<u>פתרון:</u>

נפצל ל – 2 מערכות:

$$\begin{cases} u_{tt}^h - u_{xx}^h = 0 \\ u^h(x,0) = \cos^2(\pi x) \\ u_t^h(x,0) = 2\cos(2\pi x) \\ u_x^h(0,t) = u_x^h(1,t) = 0 \end{cases}, \begin{cases} u_{tt}^p - u_{xx}^p = \cos(2\pi x)\cos(2\pi t) \\ u^p(x,0) = 0 \\ u_t^p(x,0) = 0 \\ u_x^p(0,t) = u_x^p(1,t) = 0 \end{cases}$$

<u>נפתור את החלק ההומוגני:</u>

$$u_{tt}^h - u_{xx}^h = 0$$

נבצע הפרדת משתנים:

$$u^h(x,t) = X(x)T(t)$$

נציב במד"ח:

$$X(x)T'(t) - X''(x)T(t) = 0$$

$$\boxed{\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = -\lambda}$$

מתנאי השפה:

$$0 = u_x^h(0,t) = X'(0)\underbrace{T(t)}_{\neq 0} \Rightarrow \boxed{X'(0) = 0}$$

$$0 = u_x^h(1,t) = X'(1)\underbrace{T(t)}_{\neq 0} \Rightarrow \boxed{X'(1) = 0}$$

קיבלנו:

$$\begin{cases} \frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = -\lambda \\ X'(0) = X'(1) = 0 \end{cases}$$

נפתור קודם עבור X:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(1) = 0 \end{cases}$$

<u>$\lambda = 0$:</u>

$$X''(x) = 0$$

$$X'(x) = c$$

$$X(x) = cx + d$$

$$0 = X'(0) = X'(1) = c \Rightarrow \boxed{c = 0}$$

$$\boxed{X(x) = d}$$

$\underline{\lambda < 0}$:

פתרון רק טריוויאלי (בדקו זאת!).

$\underline{\lambda > 0}$:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(1) = 0 \end{cases}$$

$$k^2 + \lambda = 0 \Rightarrow k^2 = -\lambda \Rightarrow k = \pm i\sqrt{\lambda}$$

$$X(x) = c_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)$$

$$X'(x) = -c_1\sqrt{\lambda}\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) + c_2\sqrt{\lambda}\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right)$$

נציב תנאי שפה:

$$0 = X'(0) = c_2 \underbrace{\sqrt{\lambda}}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \boxed{c_2 = 0}$$

$$0 = X'(1) = -\underbrace{c_1}_{\neq 0}\underbrace{\sqrt{\lambda}}_{\neq 0}\sin\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0 \Rightarrow \sin\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0$$

$$\sqrt{\lambda} = n\pi$$

$$\boxed{\lambda_n = (n\pi)^2}$$

אלו הם הע"ע. נציב כדי לקבל את הפ"ע:

$$X_n(x) = C_n \cos(n\pi x)$$

נוכל לאחד את שתי הפתרונות שלנו לפתרון אחד:

$$X_n(x) = C_n \cos(n\pi x)\,, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

נחזור ל – T:

$$\frac{T_n''}{T_n} = -n^2\pi^2$$

עבור $n = 0$ נקבל –

$$\frac{T_0''(t)}{T_0(t)} = 0$$

$$T_0''(t) = 0$$

$$\boxed{T_0(t) = A_0 + B_0 t}$$

עבור $n \neq 0$ נקבל –

$$T_n''(t) + n^2\pi^2 T_n(t) = 0$$

$$k^2 + (n\pi)^2 = 0$$

$$k^2 = -(n\pi)^2$$

$$\boxed{k = \pm in\pi}$$

לכן:

$$\boxed{T_n = A_n\cos(n\pi t) + B_n\sin(n\pi t)}$$

נחזור ל – u:

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = X_0(x)T_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t)$$

$$u_0(x,t) = X_0(x)T_0(t) = C(A_0 + B_0 t) = \frac{a_0 + b_0 t}{2}$$

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = C_n\cos(n\pi x)\,[A_n\cos(n\pi t) + B_n\sin(n\pi t)]$$
$$= \cos(n\pi x)\,[a_n\cos(n\pi t) + b_n\sin(n\pi t)]$$

לכן:

$$u^h(x,t) = \frac{a_0 + b_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\pi x)\,[a_n\cos(n\pi t) + b_n\sin(n\pi t)]$$

נציב תנאי התחלה:

$$u^h(x,0) = \cos^2(\pi x) = \frac{1+\cos(2\pi x)}{2}$$

$$\Rightarrow u^h(x,0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\pi x)\,a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi x)$$

$$n = 0 : \boxed{a_0 = 1}$$

$$n = 2 : \boxed{a_2 = \frac{1}{2}}$$

נגזור:

$$u_t^h(x,t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\pi x)\,[-n\pi a_n\sin(n\pi t) + n\pi b_n\sin(n\pi t)]$$

$$u_t^h(x,0) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\pi x)\,n\pi b_n = 2\cos(2\pi x)$$

$$n = 2 : 2\pi b_2 = 2 \Rightarrow \boxed{b_2 = \frac{1}{\pi}}$$

לכן:

$$\boxed{u^h(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi x)\cos(2\pi t) + \frac{1}{\pi}\cos(2\pi x)\sin(2\pi t)}$$

נחפש כעת פתרון פרטי:

$$F(x,t) = \cos(2\pi x)\cos(2\pi t)$$

$$u^p = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(t)\cos(n\pi x)$$

(אינדקס הסכימה מתחיל מ – 0 כי מקודם ראינו ש – λ עבור $n = 0$ לא נותן פתרון טריוויאלי).

נכתב בצורה אחרת:

$$u^p = \frac{h_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t)\cos(n\pi x)$$

נבדוק את תנאי השפה:

$$u_x^p(0,t) = u_x^p(1,t) = 0$$

$$u_x^p = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t)\cdot(-n\pi)\sin(n\pi x)$$

$$u_x^p(0,t) = \sum_{n=1}^{\infty} -n\pi h_n(t)\sin(0) = 0$$

$$u_x^p(1,t) = \sum_{n=1}^{\infty} -n\pi h_n(t)\sin(n\pi) = 0$$

אכן מקיים את תנאי השפה.

נציב במד"ח:

$$u_{tt}^p = \frac{h_0''(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} h_n''(t)\cos(n\pi x)$$

$$u_{xx}^p = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2\pi^2 h_n(t)\cos(n\pi x)$$

$$\Rightarrow u_{tt}^p - u_{xx}^p = \frac{h_0''(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[h_n''(t) + n^2\pi^2 h_n(t)\right]\cos(n\pi x) = \cos(2\pi x)\cos(2\pi t)$$

$$\Rightarrow \frac{h_0''(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[h_n''(t) + n^2\pi^2 h_n(t)\right]\cos(n\pi x) = \cos(2\pi x)\cos(2\pi t)$$

לכן:

$$\begin{cases} n=2: h_2''(t)+4\pi^2 h_2(t)=\cos(2\pi t) \\ n=0: \dfrac{h_0''(t)}{2}=0 \\ n\neq 0,2: \ h_n''(t)+4\pi^2 h_n(t)=0 \end{cases}$$

נציב את תנאי ההתחלה שלנו:

$$u^p(x,0)=\frac{h_0(0)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} h_n(0)\cos(n\pi x)=0$$

$$\Rightarrow \forall n: h_n(0)=0$$

$$u_t^p(x,0)=\frac{h_0'(0)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} h_n'(0)\cos(n\pi x)=0$$

$$\forall n: h_n(0)=0$$

ונתאים את תנאי ההתחלה לכל אחד מהמד"רים שלנו.

כעת, נשים לב ששתי המשוואות האחרונות שלנו (מד"ר) הם פתרונות טריוויאליים לפי תנאי ההתחלה שמצאנו להם (ניתן לבדוק) ולכן נתרכז רק במד"ר:

$$\begin{cases} h_2''(t)+4\pi^2 h_2(t)=\cos(2\pi t) \\ h_2(0)=h_2'(0)=0 \end{cases}$$

נפתור את החלק ההומוגני:

$$h_2^{h''}(t)+4\pi^2 h_2^h(t)=0$$

$$k^2+4\pi^2=0$$

$$k=\pm 2\pi i$$

$$\Rightarrow \boxed{h_2^h=C_2\cos(2\pi t)+D_2\sin(2\pi t)}$$

כעת, עבור הפתרון הפרטי נרצה לנחש פתרון (לפי הגורם בצד ימין של המשוואה):

$$h_2^p(t)=a\cos(2\pi t)+b\sin(2\pi t)$$

אבל הניחוש מוכל בתוך הפתרון הכללי להומוגני. לכן ננחש:

$$h_2^p(t)=t[b\cos(2\pi t)+a\sin(2\pi t)]$$

נרצה להציב במד"ר:

$$h_2^{p''}=\cos(2\pi t)\,[4\pi a-4\pi^2 at]+\sin(2\pi t)\,[4\pi b-4\pi^2 bt]$$

$$4\pi^2 h_2^p=\cos(2\pi t)\,[4\pi^2 at]+\sin(2\pi t)\,[4\pi^2 bt]$$

לכן:

$$\cos(2\pi t)\,[4\pi a]+\sin(2\pi t)\,[-4\pi b]=\cos(2\pi t)$$

$$\Rightarrow \boxed{b=0}$$

$$\Rightarrow 4\pi a = 1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{4\pi}}$$

לכן:

$$\boxed{h_2^p = \frac{t}{4\pi}\sin(2\pi t)}$$

לכן:

$$h_2(t) = C_2\cos(2\pi t) + D_2\sin(2\pi t) + \frac{t}{4\pi}\sin(2\pi t)$$

נציב את תנאי ההתחלה של המד"ר:

$$0 = h_2(0) = C_2 \Rightarrow \boxed{C_2 = 0}$$

$$h_2'(t) = 2\pi D_2\cos(2\pi t) + \frac{1}{4\pi}\sin(2\pi t) + \frac{1}{2}t\cos(2\pi t)$$

$$h_2'(0) = 2\pi D_2 = 0 \Rightarrow \boxed{D_2 = 0}$$

לכן:

$$\boxed{h_2(t) = \frac{t}{4\pi}\sin(2\pi t)}$$

נחזור ל - u^p:

$$u^p = \frac{h_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\pi x)\, h_n(t)$$

$$\boxed{u^p = \frac{t}{4\pi}\sin(2\pi t)\cos(2\pi x)}$$

ונזכור כי:

$$u^h(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi x)\cos(2\pi t) + \frac{1}{\pi}\cos(2\pi x)\sin(2\pi t)$$

ולכן:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{2}\cos(2\pi t) + \frac{t+4}{4\pi}\sin(2\pi t)\right]\cos(2\pi x)}$$

<u>הערה:</u> אם נשאיף את $t \to \infty$ נקבל ש - $u \to \infty$ כלומר אינה חסומה בזמן, תופעה זו נקראת תהודה "רזונס" שנגרמת כאשר החלק הלא הומוגני בצד ימין של המד"ח $\cos(2\pi t)$ מוכל בפתרון הכללי של ההומוגני ב - $h_2(t)$.

■