פתרון תרגיל 6 מבוא לתורת החבורות תשע"ט

שאלה 1. תהי G חבורה. הפריכו בעזרת דוגמאות נגד את הטענות השגויות הבאות:

א. אם $N, K \lhd G$ וגם $N \cong K$, אז ${}^{G}/_{N} \cong {}^{G}/_{K}$. רמז: הראו שמתקיים: $\mathbb{Z} \cong n\mathbb{Z}$.

ב. אם $N \lhd G$ וגם ${}^{G}/_{N} \cong G$, אז $N = \{e_G\}$.

פתרון. א. אפשר להראות שמתקיים: $\mathbb{Z} \cong n\mathbb{Z}$ (עבור $n \neq 0$) באמצעות האיזומורפיזם: $f : \mathbb{Z} \to n\mathbb{Z},\ f(x) = nx$. לכן גם $n\mathbb{Z} \cong m\mathbb{Z}$. החבורה $G = \mathbb{Z}$ אבלית, ולכן כל תת־חבורה שלה היא נורמלית. כמו כן ראינו ${}^{\mathbb{Z}}/_{n\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_n$. לכן אם נבחר $N = 2\mathbb{Z}$ ו-$K = 3\mathbb{Z}$ נקבל כי $N \cong K$, אבל המנות ${}^{G}/_{N} \cong \mathbb{Z}_2$ ו-${}^{G}/_{K} \cong \mathbb{Z}_3$ לא איזומורפיות כי הן מסדר שונה.

ב. ברור שחייבים לבחור חבורה אינסופית. הרי אם G סופית ו-$|N| > 1$, אז $|{}^{G}/_{N}| = |G| / |N|$ קטן ממש מ-$|G|$. הדרך הנוחה למצוא פתרון היא למצוא אפימורפיזם $f : G \to G$ שהוא לא מונומורפיזם. אז הגרעין שלו הוא תת־חבורה נורמלית לא טריוויאלית ולפי משפט האיזומורפיזם הראשון מתקיים ${}^{G}/_{\ker f} \cong G$.
נבחר $G = \mathbb{C}^*$, ונגדיר אפימורפיזם $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ לפי $f(x) = x^2$. ודאו שאתם יודעים להוכיח שזהו אפימורפיזם. הגרעין $\ker f$ איננו טריוויאלי, כי גם $-1 \in \ker f$.
אפשרות אחרת היא $G = \mathbb{R}[x]$, אוסף הפולינומים הממשיים, עם הפעולה של חיבור פולינומים. אפשר לוודא שזו אכן חבורה, ושהיא אבלית. נבחר את אוסף הפולינומים הקבועים $H = \{a_0 : a_0 \in \mathbb{R}\}$. ברור ש-$H \neq \{0\}$ (הפולינום הקבוע 0 הוא איבר היחידה ב-G), אבל מתקיים ${}^{G}/_{H} \cong G$. נסו למצוא דוגמאות נוספות.

שאלה 2. יהי הומומורפיזם $f : \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_{12}$. רמז כללי: משפט האיזומורפיזם הראשון.

א. הוכיחו כי $|\operatorname{im} f| \in \{1, 3\}$.

ב. לכל אחת מהאפשרויות בסעיף הקודם ענו האם f הוא מונומורפיזם? האם הוא אפימורפיזם?

ג. נסמן $K = \ker f$. האם יתכן כי ${}^{\mathbb{Z}_{15}}/_{K} \cong \mathbb{Z}_3$? האם יתכן כי ${}^{\mathbb{Z}_{15}}/_{K} \cong \mathbb{Z}_4$? האם יתכן כי ${}^{\mathbb{Z}_{15}}/_{K} \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$? בכל פעם שקבעתם שכן, מצאו דוגמה של f ושל K באופן מפורש.

פתרון. א. נסמן $K = \ker f$. לפי משפט האיזומורפיזם הראשון מתקיים

$${}^{\mathbb{Z}_{15}}/_{K} \cong \operatorname{im} f$$

ולכן $|\operatorname{im} f| = |\mathbb{Z}_{15}| / |K|$. כלומר $|\operatorname{im} f| \mid 15$. מצד שני $\operatorname{im} f \leq \mathbb{Z}_{12}$, ולכן $|\operatorname{im} f| \mid 12$. מספר טבעי המחלק את 15 וגם את 12 יכול להיות רק 1 או 3, כדרוש.

ב. f יהיה אפימורפיזם רק אם $|\operatorname{im} f| = 12$, ולפי הסעיף הקודם זה לא יתכן. בנוסף לא יתכן ש-f חח"ע, כי עוצמת הטווח $|\mathbb{Z}_{12}| = 12$ קטנה ממש מעוצמת המקור $|\mathbb{Z}_{15}| = 15$, ולכן f לא מונומורפיזם.

ג. אם $|\mathrm{im}\, f| = 1$, אז $|K| = 15$. כלומר f במקרה זה הוא ההומומורפיזמים הטריוויאלי, ונקבל $\mathbb{Z}_{15}/K \cong \{e\}$. אם $|\mathrm{im}\, f| = 3$, אז $|K| = 5$. החבורה $\mathbb{Z}_{15}$ היא ציקלית סופית, ולכן יש לה תת־חבורה אחת מכל סדר המחלק את סדרה. האפשרות היחידה במקרה זה היא $K = \{0, 3, 6, 9, 12\}$. חבורת המנה $\mathbb{Z}_{15}/K$ היא מסדר 3, ולכן בהכרח איזומורפית ל-$\mathbb{Z}_3$. שאר האפשרויות המופיעות בשאלה לא יתכנו.

שאלה 3. איזומורפיזם $f : G \to G$ נקרא אוטומורפיזם. את קבוצת האוטומורפיזם של G נסמן $Aut\,(G)$. הוכיחו שזו חבורה עם פעולת ההרכבה.

פתרון. ראשית, הרכבה של אוטומורפיזמים היא אכן אוטומורפיזם; הרכבה של חח"ע ועל היא חח"ע ועל, ובנוסף אם f_1, f_2 הומומורפיזמים אז גם:

$$f_1 \circ f_2\,(g_1 g_2) = f_1\,(f_2\,(g_1 g_2)) = f_1\,(f_2\,(g_1)\, f_2\,(g_2)) = f_1\,(f_2\,(g_1))\, f_1\,(f_2\,(g_2)) = (f_1 \circ f_2\,(g_1))\,(f_1 \circ f_2\,(g_2))$$

לכל $g_1, g_2 \in G$ ולכן ההרכבה היא הומומורפיזם.

הרכבה היא פעולה קיבוצית. האיבר הנייטרלי הוא פונקציית הזהות: $Id_G : G \to G,\ Id_G\,(g) = g$.

נשאר להוכיח שאם $f \in Aut\,(G)$ אז גם $f^{-1} \in Aut\,(G)$. אם f חח"ע ועל אז f^{-1} חח"ע ועל, ולכן נשאר להראות שאם f הומומורפיזם אז גם f^{-1} הומומורפיזם.

אם כן, יהיו $g_1, g_2 \in G$. קיימים $h_1, h_2 \in G$ עבורם: $g_i = f\,(h_i)$. נקבל:

$$f^{-1}\,(g_1 g_2) = f^{-1}\,(f\,(h_1)\, f\,(h_2)) = f^{-1}\,(f\,(h_1 h_2)) = h_1 h_2 = f^{-1}\,(g_1)\, f^{-1}\,(g_2)$$

שאלה 4. יהיו: $G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}$, $H = (2\mathbb{Z}_4) \times (3\mathbb{Z})$. הראו ש: $G/H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$.

פתרון.

מוטיבציה: אנחנו מכירים את המנות הבאות: $\mathbb{Z}_4/2\mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_2$ ו-$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_3$. אז ננחש ש-$G/H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$. כלומר, רוצים להגדיר $f : G \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ שעבורה $\ker f = H$.

נגדיר $f : \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ לפי

$$f\,(m, n) = (m \pmod 2, n \pmod 3)$$

צריך לוודא שוב ש-f מוגדרת היטב: אם ניקח $(m, n) = (m', n)$, כלומר $m \equiv m' \pmod 4$, אזי גם $m \equiv m' \pmod 2$, ולכן

$$f\,(m, n) = (m \pmod 2, n \pmod 3) = (m' \pmod 2, n \pmod 3) = f\,(m', n)$$

מכאן ש-f מוגדרת היטב.

נראה ש-f הומומורפיזם: יהיו $(m_1, n_1), (m_2, n_2) \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}$. אזי

$$\begin{aligned} f\,((m_1, n_1) + (m_2, n_2)) &= f\,(m_1 + m_2, n_1 + n_2) = \\ &= (m_1 + m_2 \pmod 2, n_1 + n_2 \pmod 3) = \\ &= (m_1 \pmod 2, n_1 \pmod 3) + (m_2 \pmod 2, n_2 \pmod 3) = \\ &= f\,(m_1, n_1) + f\,(m_2, n_2) \end{aligned}$$

נראה ש-f על: אם $(m, n) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, נבחר נציג של m ושל n, ואז $f\,(m, n) = (m, n)$ (כאשר בצד שמאל משתמשים בנציגים).

נחשב את $\ker f$:

$$\begin{aligned} \ker f &= \{(m, n) \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z} | f\,(m, n) = (0, 0)\} = \\ &= \{(m, n) \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z} | (m \pmod 2, n \pmod 3) = (0, 0)\} = \\ &= (2\mathbb{Z}_4) \times (3\mathbb{Z}) = H \end{aligned}$$

לכן, לפי משפט האיזומורפיזם הראשון,

$$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}_4) \times (3\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$$

(וזה גם איזומורפי ל-$\mathbb{Z}_6$).