U

# תרגיל 8 טופולוגיה תשע"ז

**תזכורת:**
יהי $(X,\tau)$ מרחב טופולוגי.

1. תהי $a \in X$. קבוצה $B \subseteq \tau$, $B = \{U_i\}_{i\in I}$ נקראת בסיס מקומי אם $a \in U_i$ לכל $i \in I$ ובנוסף לכל $V \in \tau$ סביבה של $a$ קיימת $U_i \in B$ עבורה $a \in U_i \subseteq V$. המרחב $X$ נקרא $B_1$ אם לכל נקודה יש בסיס מקומי בן מניה.
2. קבוצה $B \subseteq \tau$, $B = \{U_i\}_{i\in I}$ נקראת בסיס של $\tau$, אם לכל $V \in \tau$ קיימת $C \subseteq B$ עבורה $V = \bigcup_{A\in C} A$ (כלומר, כל קבוצה פתוחה היא איחוד של קבוצות מתוך $B$). באופן שקול, $B$ נקראת בסיס אם לכל $a \in X$ ולכל $V \in \tau$ סביבה של $a$ קיימת $U \in B$ המקיימת $a \in U \subseteq V$. המרחב $X$ נקרא $B_2$ אם יש לו בסיס בן מניה.
3. קבוצה $B \subseteq \tau$ היא בסיס אם ורק אם $\bigcup B = X$ ולכל $A_1, A_2 \in B$ קיימת $C \subseteq B$ עבורה $A_1 \cap A_2 = \bigcup_{A\in C} A$.
4. יהי $(Y,\sigma)$ מרחב טופולוגי נוסף. **טופולוגיית המכפלה** על המרחב $X \times Y$ היא הטופולוגיה שבסיסה הוא $B = \{O_1 \times O_2 | O_1 \in \tau, O_2 \in \sigma\}$.
5. יהיו $B', B''$ בסיסים של $(X,\tau), (Y,\sigma)$ בהתאמה. אזי גם הקבוצה $\{O_1 \times O_2 | O_1 \in B', O_2 \in B''\}$ היא בסיס של טופולוגיית המכפלה.

צ

1. הוכיחו כי מרחב טופולוגי $X$ הוא טריוויאלי אם ורק אם יש לו בסיס עם איבר אחד.
2. הוכיחו כי במרחב דיסקרטי קבוצה היא בסיס אם ורק אם היא מכילה את כל הנקודונים.
3. יהיו $X,Y$ מרחבים טופולוגיים ו $f : X \to Y$ פונקציה. ניקח $\mathcal{B}$ להיות בסיס כלשהוא עבור $Y$. הוכיחו כי $f$ רציפה אם ורק אם לכל $B \in \mathcal{B}$ $f^{-1}(B)$ היא קבוצה פתוחה.
4. יהיו $(X,\tau_X)$ ו $(Y,\tau_Y)$ מרחבים טופולוגיים. נסמן $\mathcal{B} = \tau_X \times \tau_Y$
   (א) הראו כי $(X \times Y, \mathcal{B})$ היא לא בהכרח טופולוגיה.
   (ב) הראו כי $\mathcal{B}$ הוא בסיס עבור טופולוגיה כלשהיא על $X \times Y$.
5. יהי $(X,\tau)$ מרחב טופולוגי $B_2$.
   (א) הוכיחו כי כל תת מרחב של $X$ הוא גם מרחב $B_2$.
   (ב) הוכיחו כי $|\tau| \leq \aleph = 2^{\aleph_0}$.

(ג) הראו כי לכל כיסוי כלשהוא של קבוצות פתוחות יש תת כיסוי בן מניה. (תכונה זאת נקראת תכונת לינדולף).

(ד) הראו שלכל בסיס $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i\in I}$ יש תת קבוצה בת מניה שהיא גם בסיס.

(ה) יהי $X$ מרחב טופולוגי $B_1$ כך ש $X$ היא קבוצה בת מנייה. הוכיחו כי $X$ הוא מרחב $B_2$.

6. יהיו $\{(X_i, d_i)\}_{i=1}^n$ מרחבים מטריים. הראו שמרחב המכפלה $X = \prod X_i$ הוא מטריזבילי (עם טופולוגיית המכפלה).

7. יהי $(X, d)$ מרחב מטרי. הוכיחו שהפונקציה: $d : X \times X \to \mathbb{R}$ רציפה (לפי טופולוגיית המכפלה).

8. יהי $X$ מ"ט. נגדיר את **האלכסון** של $X$ באופן הבא:

$$\Delta = \{(x,x) \,|x \in X\} \subseteq X \times X$$

הוכיחו שהקבוצה $\Delta$ סגורה **אם ורק אם** $X$ האוסדורף.

9. יהיו $X, Y$ מרחבים טופולוגיים.

(א) תהיינה $A \subseteq X, B \subseteq Y$ סגורות. הוכיחו שהקבוצה $A \times B \subseteq X \times Y$ סגורה.

(ב) תהיינה $A \subseteq X, B \subseteq Y$. הוכיחו שמתקיים: $cl\,(A \times B) = cl\,(A) \times cl\,(B)$.

(ג) נניח שהמרחבים $X, Y$ ספרביליים. האם $X \times Y$ ספרבילי?

10. יהיו $\{(X_i, \tau_i)\}_{i=1}^n$ מרחבים טופולוגיים $T_1$. הוכיחו שמרחב המכפלה הוא $T_1$.

11. יהי $(X, \tau_{cof})$ מרחב אינסופי. האם טפולוגיית המכפלה $\tau_\pi$ על $X \times X$ היא הטופולוגיה הקו-סופית על $X \times X$?

12. יהיו $X, Y$ מרחבים טופולוגיים. הוכיחו ש: $X \times Y \cong Y \times X$.