מבנים אלגברים ־ פתרון תרגיל 6 תשע"ה

1. הוכיחו כי הת"ח הבאות הן נורמליות ע"י כך שתראו שהן גרעין של איזשהו הומומורפיזם.

(א) $G\times\{e_G\}\le G\times G$.
נראה כי ההטלה $f:G\times G\to G$ המוגדרת $f(x,y)=x$ היא הומומורפיזם:
$f\left((x,y)(z,w)\right)=f((xz,yw))=xz=f(x,y)f(z,w)$.
כעת נחשב את הגרעין:
$Kerf=\{(x,y)\,|\,f(x,y)=e_G\}=\{(x,y)|\,x=e_G\}=\{(e_G,y)\,|\,y\in G\}=$
$\{e\}\times G$.

(ב) $\langle\sigma\rangle\le D_n$ כאשר σ הוא היוצר מסדר n.
נשתמש בהעתקה $f:D_n\to\mathbb{Z}_2$ המוגדרת לפי $f(\tau^i\sigma^j)=i\in\mathbb{Z}_2$ ונראה שהיא הומומורפיזם:
$$f\left((\tau^i\sigma^k)(\tau^j\sigma^s)\right)=\begin{cases}f\left(\tau^i\sigma^{k+s}\right)=i & j=0\\ f\left(\tau^{i+1}\sigma^{k(n-1)}\sigma^s\right)=i+1 & j=1\end{cases}=i+j=$$
$f(\tau^i\sigma^k)+f(\tau^j\sigma^s)$

כעת נחשב את הגרעין: $Kerf=\left\{\tau^i\sigma^k\,|\,f(\tau^i\sigma^k)=0\right\}=\left\{\tau^i\sigma^k\,|\,i=0\right\}=$
$\left\{\sigma^k|\,k\in\mathbb{Z}\right\}=<\sigma>$.

(ג) $H\le\mathbb{R}^3$ כאשר H הוא המישור המיוצג ע"י המשוואה $2x+4y-z=0$.
נגדיר $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ ע"י $f(x,y,z)=2x+4y-z$. נראה שזה הומומורפיזם:

$$\begin{aligned}f\left((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)\right)&=f\left((x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)\right)=\\ =2(x_1+x_2)+4(y_1+y_2)-(z_1+z_2)&=f\left((x_1,y_1,z_1)\right)+f\left((x_2,y_2,z_2)\right)\end{aligned}$$

.
קל לראות שהגרעין הוא בדיוק המישור.

2. תהי G חבורה, $H\trianglelefteq G$. הוכיחו: הסדר של gH הוא n אם"ם n הוא המס' הטבעי המינימלי המקיים $g^n\in H$.
לפי ההגדרה של סדר:
$o(gH)=min\left\{n\in\mathbb{N}\,|\,(gH)^n=e_{G/H}=H\right\}=min\left\{n\in\mathbb{N}\,|\,g^nH=H\right\}=$
$min\left\{n\in\mathbb{N}\,|\,g^n\in H\right\}$.

3. נתבונן בחבורה $\mathbb{R}^2$, היא אבלית ולכן הת"ח $H=\langle(2,2)\rangle$ היא נורמלית.
מה הסדר של האיבר $(1,1)$ב $\mathbb{R}^2$? מה הסדר של האיבר $(1,1)+H$ בחבורת המנה $\mathbb{R}^2/H$?
קל לראות ש $(1,1)+(1,1)+\cdots+(1,1)\ne(0,0)$ ולכן הסדר של $(1,1)$ ב $\mathbb{R}^2$

הוא אינסוף.

לעומת זאת, $e_{G/H}$ $((1,1)+H)+((1,1)+H)=(2,2)+H=H=$ ולכן $o((1,1)+H)=2$.

4. רשמו את התמורות הבאות כמכפלה של מחזורים זרים וחשבו את התמורה ההופכית:

   (א) $\left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 3 & 5 & 1 & 6 & 2 \end{array}\right)$

   נרשום $(145)(27)$ ואז התמורה ההופכית היא $(145)^{-1}(27)^{-1}=(541)(2)$

   (ב) $(1452)(13)(3)(2514)$

   לאחר שנכפול נקבל (1534), והתמורה ההופכית היא $(1534)^{-1}=(4351)$

5. פתרו את המערכות הבאות:

   (א) $(135)x=(12)(245)$

   נכפול משמאל ב $(135)^{-1}=(531)$ ונקבל $x=(531)(12)(245)=(1243)$.

   (ב) $(153)x(42)=(13)(245)$

   נכפול מימין ב $(42)^{-1}=(42)$ ונכפול משמאל ב $(153)^{-1}=(351)$. נקבל $x=(351)(13)(245)(42)=(152)$.

6. נתונה התמורה $\sigma=\left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right)$ ב S_7.

   (א) רשמו אותה כמכפלה של מחזורים זרים.

   $\sigma=(125)(37)(46)$

   (ב) האם $\sigma \in A_7$?

   σהיא מכפלה של שתי תמורות אי־זוגיות (החילופים) ותמורה זוגית אחת־ ולכן היא תמורה זוגית.

   (ג) מה הסדר של σ^3?

   קל לחשב שהסדר של σהוא $o(\sigma)=lcm(3,2,2)=6$. ולכן הסדר של σ^3הוא $\frac{o(\sigma)}{gcd\left(o(\sigma),3\right)}=\frac{6}{(6,3)}=\frac{6}{3}=2$.

   (ד) עבור $\tau=(354)(12)$ חשבו את $\tau\sigma\tau^{-1}$.

   $\tau\sigma\tau^{-1}=\tau(125)(37)(46)\tau^{-1}=\left(\tau(125)\tau^{-1}\right)\left(\tau(37)\tau^{-1}\right)\left(\tau(46)\tau^{-1}\right)=(214)(57)(36)$

7. מצא ת"ח מסדר 12 ב S_8.

מספיק למצוא איבר מסדר 12 שם. (ברור שאין מחזור מאורך כזה־ כי אין מספיק מספרים ב $\{1,\ldots,8\}$).

מחפשים מספרים $k,m \in \mathbb{N}$כך ש $lcm(k,m)=12$ למשל $k=4, m=3$ אזי $\sigma=(1234)(567)\in S_8$ הוא מסדר 12. ולכן הת"ח שהוא יוצר $<\sigma>$ היא מסדר 12 .