אינפי 4 - הרצאה 1

ליאור פולק

27 במרץ 2016

חשבון אינפיניטסימלי 4
פרופסור אנדריי לרנר
ציון: 5% שיעורי בית, 10% בוחן, 85% מבחן

1 עקומות

<u>הגדרה 1</u>: יהי $I \subset \mathbb{R}$ קטע. הפונקציה $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ נקראת <u>עקומה</u>. התמונה $\Gamma = \gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$ גם תיקרא <u>עקומה</u>. מילים נרדפות: CURVE, TRACE , עקומה, מסילה. לפונקציה γ עצמה קוראים <u>ההצגה הפרמטרית</u> של Γ.
<u>דוגמה</u>:

$\gamma_1(t) = (\cos(t), \sin(t)), t \in [0, 2\pi]$
$\gamma_2(t) = (\cos(2t), \sin(2t)), t \in [0, 2\pi]$
$\gamma_3(t) = (\sin(t), \cos(t)), t \in [0, 2\pi]$

אלו הן 3 עקומות שונות.
<u>הגדרה 2</u>: אם $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ אזי $\gamma(a), \gamma(b)$ נקראות <u>הקצוות</u> של העקומה. אם הן שוות, נאמר ש γ היא <u>עקומה סגורה</u>.
<u>הגדרה 3</u>: אם $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ חח"ע אזי היא נקראת <u>עקומה פשוטה</u>, או <u>עקומת ג'ורדן</u>.
אם $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ <u>סגורה</u> ואם $\gamma : (a, b] \to \mathbb{R}^n$ <u>פשוטה</u> אזי גם $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ פשוטה.

2 אוריינטציה של עקומה

תהי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ עקומה. אזי הכיוונים $\vec{ab},\vec{ba}$ מגדירים אוריינטציה על העקומה.

דוגמה: אם $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^n$ אזי העקומה $-\gamma,\gamma(1-t)=(-\gamma)(t)$ מגדירה אוריינטציה הפוכה על γ.

הגדרה 4: עקומות $\gamma_1:I_1\to\mathbb{R}^n,\gamma_2:I_2\to\mathbb{R}^n$ נקראות שקולות אם יש $\phi:I_1\to I_2$ כך ש-ϕ חח"ע, $\phi(I_1)=I_2$, וגם $\phi'(t)>0$ וגם $\gamma_2(\phi(t))=\gamma_1(t)$ לכל $t\in I_2$.
הערה: לעקומות שקולות יש אוריינטציה זהה.

הגדרה 5: נניח $\gamma:I\to\mathbb{R}^n$, $\gamma\in C^1(I)$. הוקטור $\gamma'(t)$ נקרא וקטור משיק ל $\Gamma=\gamma(I)$ בנקודה $\gamma(t)$.

הגדרה 6: עקומה $\gamma:I\to\mathbb{R}^n$ תיקרא חלקה אם לכל $t\in I$, $\gamma'(t)\neq 0$ וגם $\gamma\in C^1(I)$.

דוגמה: $t\in\mathbb{R}$, $\gamma=(t^3,|t|^3)$. זהו בעצם גרף של פונקציית הערך המוחלט.
נרשום מחדש: $\tilde{\gamma}=(t,|t|)$ ונשים לב שהעקומות לא שקולות- זאת בשלישית חלקה (ניתן לוודא שהיא גזירה באפס), ואילו זאת בראשונה לא חלקה. עוד נשים לב כי $\gamma\in C^1(I)$ אבל $\gamma'(0)=0$.

הגדרה 7: עקומה $\gamma:I\to\mathbb{R}^n$ נקראת חלקה למקוטעין אם ניתן לחלק את I למספר סופי של תתי קטעים בהם γ חלקה.

הגדרה 8: תהי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ עקומה. לכל חלוקה של $[a,b]$,
$\pi:a=x_0<x_1\dots x_m=b$, נגדיר $L(\pi,\gamma)=\sum\limits_{i=1}^{m}||\gamma(x_i)-\gamma(x_{i-1})||$.

הגדרה 9: אם $L(\gamma)=\sup\limits_{\pi}L(\pi,\gamma)$ קיים וקטן ממש מאינסוף, נאמר כי γ עקומה בעלת אורך. ל-$L(\gamma)$ נקרא האורך של γ.

<u>דוגמה</u>: מטאטא שבור. מציירים שורת קווים עולים שמתאימים לכל שבר מהצורה $\frac{1}{n}$ קטע באורך $\frac{1}{n}$ שניצב לציר האיקס, ונסכום את האורך של העמודים. כדי ליצור עקומה, נחבר באופן שרירותי את ראשי העמודים באמצעות עקומה חלקה. לבסוף נקבל שלכל n טבעי יש חלוקה π כך ש $L(\pi,\gamma) > \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i}$, ולכן אין אורך (הטור ההרמוני שמתבדר).

<u>משפט</u>: תהי $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ עקומה גזירה ברציפות. אזי γ בעלת אורך הנתון על ידי $L(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)||dt$.

<u>דוגמה</u>: $\gamma(t) = (a\sin(t), b\cos(t))$, $t \in [0,2\pi]$. זוהי אליפסה.

$$\Rightarrow L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)}dt$$

וזהו אניטגרל אליפטי שפתיר אנליטית אם $a = b \Leftarrow L(\gamma) = 2\pi a$

<u>נסמן</u> $\varphi = (\varphi_1, \dots \varphi_n)$ ו־ $\int_a^b \varphi = (\int_a^b \varphi_1, \dots \int_a^b \varphi_n)$

<u>למה</u>: אם φ_i אינטגרל על $[a,b]$ אזי $||\int_a^b \varphi(x)dx|| \le \int_a^b ||\varphi(x)||dx$

<u>הוכחה</u>: נניח $\sum_{i=1}^{k} \varphi_j(\zeta_i)\Delta x_i$ סכום רימן שמתכנס לאינטגרל $\int_a^b \varphi_j(x)dx$.

לפי אי–שיוויון המשולש, $||\sum_{i=1}^{k} \varphi_1(\zeta_i)\Delta x_i, \dots \sum_{i=1}^{k} \varphi_n(\zeta_i)\Delta x_i|| \le \sum_{i=1}^{k} ||\varphi(\zeta_i)||\Delta x_i$. אבל כל φ_i אינטגרביליות, ולכן גם $||\varphi||$ אינטגרבילית. לכן אם $\max \Delta x_i \to 0$ נקבל את הנדרש. ■

<u>הוכחה</u> למשפט חישוב אורך עקומה:

תהי $\pi = \{x_0, x_1 \dots x_m\}$ חלוקה של $[a,b]$.

מתקיים $\gamma_j(x_i) - \gamma_j(x_{i-1}) = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \gamma_j'(t)dt$.

לפי הלמה,

$$||\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})|| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\gamma_j(x_i) - \gamma_j(x_{i-1}))^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} |\gamma_j'(t)|dt)^2}$$
$$\leq \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} ||\gamma'(t)||dt$$

לכן,

$$L(\pi, \gamma) = \sum_{i=1}^{m} ||\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})|| \leq \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} ||\gamma'(t)||dt = \int\limits_{a}^{b} ||\gamma'(t)||dt$$

ובמעבר ל $\sup\limits_{\pi}$, נקבל כי $\boxed{L(\gamma) \leq \int_a^b ||\gamma'(t)||dt}$.

לכיוון השני יהי $\epsilon > 0$ נתון! $\gamma'(t)$ רציפה בקטע סגור ולכן היא רבמ"שית שם.

לכן יש $\delta > 0$ כך שאם $|t' - t''| < \delta$ אזי $||\gamma'(t') - \gamma'(t'')|| < \epsilon$.

תהי $\pi = \{x_0, x_1 \dots x_m\}$ חלוקה של $[a,b]$ כך ש $\max(x_i - x_{i-1}) < \delta$.

<u>מתקיים</u>

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} ||\gamma'(t)||dt \underbrace{\leq}_{\text{אי שוויון המשולש}} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} ||\gamma'(t) - \gamma'(x_i)||dt + (\Delta x_i)||\gamma'(x_i)||$$
$$\leq \epsilon \Delta x_i + (\Delta x_i)||\gamma'(x_i)||$$

<u>עוד מתקיים</u>

$$(\Delta x_i)||\gamma'(x_i)|| = ||\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} (\gamma'(t) + (\gamma'(x_i) - \gamma'(t)))dt||$$
$$\underbrace{\leq}_{\text{Newton-Leibnitz theorem and Lemma}} ||\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})|| + \epsilon \Delta x_i$$

ביחד עם אי-השיוויון האחרון נקבל

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} ||\gamma'(t)||dt \leq 2\epsilon \Delta x_i + ||\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})||$$

<u>ולכן</u>

$$\int_a^b ||\gamma'(t)||dt = \sum_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} ||\gamma'(t)||dt \leq 2\epsilon(b-a) + L(\pi,\gamma) \leq 2\epsilon(b-a) + L(\gamma)$$

נשאיף $\epsilon \to 0$ לקבלת $\boxed{\displaystyle\int_a^b ||\gamma'(t)||dt \leq L(\gamma)}$

■

אינפי 4 – הרצאה 2

ליאור פולק

13 במרץ 2016

ראשית נתקן את ההגדרה שלנו לעקומה: נתעסק בקורס רק עם עקומות רציפות.

עוד נזכיר את הנוסחה לאורך עקומה: $L(\gamma) = \int\limits_a^b ||\gamma'(t)||dt$.

הערה: אם $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ גזירה ברציפות, אזי מקבלים שהאורך של הגרף שלה הוא- $L(\gamma) = \int\limits_a^b \sqrt{1+f('t)^2}dt$.

הסבר: ההצגה הפרמטרית של הגרף היא $t \in [a,b], \gamma(t) = (t, f(t))$.
מכאן, כיוון ש- $||\gamma'(t)|| = \sqrt{1+f'(t)^2}$, נקבל את הנוסחה.

הערה: אם

$t \in [0, 2\pi], \gamma_1 = (\cos(t), \sin(t))$

$t \in [0, 2\pi], \gamma_2 = (\cos(2t), \sin(2t))$

נקבל כי ל- γ_1 -ול γ_2 יש אותה תמונה אך $L(\gamma_1) = 2\pi$ ו- $L(\gamma_2) = 4\pi$.

למה: אם γ_1 -ו γ_2 עקומות שקולות, אזי הן בעלות אותו אורך.

הוכחה: נניח $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ וגם $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ ושמתקיים $\gamma_2(t) = \gamma_1(\varphi(t))$ כאשר $\varphi([c,d]) = [a,b]$ ו- $\varphi'(t) > 0$.
תהי $\pi = \{x_0, \ldots, x_m\}$ חלוקה של $[c,d]$. אזי $\pi' = \{\varphi(x_0), \ldots, \varphi(x_m)\}$ חלוקה מתאימה של $[a,b]$ ומתקיים $L(\gamma_2, \pi) = L(\gamma_1, \pi') \le L(\gamma_1)$.
נעבור ל$\sup$ מעל החלוקות π ונקבל ש- $L(\gamma_2) \le L(\gamma_1)$.

מהצד השני, אם $\pi=\{y_0,\dots,y_m\}$ חלוקה של $[a,b]$ אזי $\pi'=\{\varphi^{-1}(y_0),\dots,\varphi^{-1}(y_m)\}$ חלוקה של $[c,d]$ וגם $L(\gamma_1,\pi)=L(\gamma_2,\pi')\le L(\gamma_2)$.

נעבור ל-sup מעל החלוקות π של $[a,b]$ ונקבל ש- $L(\gamma_1)\le L(\gamma_2)$.

לכן $L(\gamma_1)=L(\gamma_2)$. ■

<u>משפט</u>: (אדיטיביות האורך)

תהי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ עקומה בעלת אורך. נניח ש- $c\in(a,b)$ ו-

$$\gamma_1=\gamma|_{[a,c]}$$
$$\gamma_2=\gamma|_{[c,b]}$$

אזי γ_1 ו- γ_2 בעלות אורך ומתקיים: $L(\gamma_1)+L(\gamma_2)=L(\gamma)$.

<u>הוכחה</u>: אם π חלוקה של $[a,c]$ אזי $\pi'=\pi\cup\{b\}$ חלוקה של $[a,b]$ ומתקיים $L(\gamma_1,\pi)\le L(\gamma,\pi')\le L(\gamma)$.

מכאן נובע ש- γ_1 גם בעלת אורך ו- $L(\gamma_1)\le L(\gamma)$.

באותו האופן נקבל ש- γ_2 בעלת אורך.

תהי $\pi_1=\{x_0,\dots,x_m\}$ חלוקה של $[a,c]$, כאשר $x_m=c$.

תהי $\pi_2=\{y_0,\dots,y_k\}$ חלוקה של $[c,b]$, כאשר $y_0=c$.

אזי $\pi_1\cup\pi_2$ חלוקה של $[a,b]$ ומתקיים $L(\gamma_1,\pi_1)+L(\gamma_2,\pi_2)=L(\gamma,\pi)\le L(\gamma)$.

נעבור ל-sup מעל π_1 ו- π_2 ונקבל ש- $L(\gamma_1)+L(\gamma_2)\le L(\gamma)$.

נוכיח את אי-השיוויון ההפוך.

תהי π החלוקה של $[a,b]$. אם $c\in\pi$ אזי נגדיר

$$\pi_1=\pi\cap[a,c]$$
$$\pi_2=\pi\cap[c,b]$$

ונקבל ש- $L(\gamma,\pi)=L(\gamma_1,\pi_1)+L(\gamma_2,\pi_2)\le L(\gamma_1)+L(\gamma_2)$.

אם $c\notin\pi$ אזי נגדיר $\pi'=\pi\cup\{c\}$.

נקבל ש- $L(\gamma,\pi)\le L(\gamma,\pi')\le L(\gamma_1)+L(\gamma_2)$.

נעבור ל-sup מעל π ונקבל $L(\gamma)\le L(\gamma_1)+L(\gamma_2)$. ■

בשיעור שעבר הגדרנו כי γ חלקה למקוטעין אם ניתן לחלק את $[a,b]$ לתתי–קטעים $[x_{i-1},x_i]$ כך ש-γ חלקה מעל (x_{i-1},x_i). נשים לב ל**תיקון**: במקום הקטע הפתוח (x_{i-1},x_i) נרשום את הקטע הסגור $[x_{i-1},x_i]$.

למה: תהי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ עקומה גזירה ברציפות למקוטעין. אזי היא בעלת אורך ו–$L(\gamma)=\int\limits_a^b||\gamma'(t)||dt$.

הוכחה: נחלק את $[a,b]$ לתתי–קטעים $[x_{i-1},x_i]$ כך ש־γ גזירה ברציפות על כל $[x_{i-1},x_i]$.

נסמן $\gamma_i=\gamma|_{[x_{i-1},x_i]}$.

לפי המשפט הקודם, $L(\gamma)=\sum\limits_i L(\gamma_i)$.

לפי משפט על אורך של עקומה גזירה ברציפות, $L(\gamma_i)=\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}||\gamma'(t)||dt$.

לכן, לפי אדיטיביות האינטגרל, נקבל

$L(\gamma)=\sum\limits_i\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}||\gamma'(t)||dt=\int\limits_a^b||\gamma'(t)||dt$. ■

1 אינטגרל לפי אורך

<u>הגדרה 1</u>: תהי $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ עקומה בעלת אורך. תהי f פונקציה ממשית המוגדרת על התמונה, $\Gamma = \gamma([a,b])$.

לכל חלוקה $\pi = \{x_0, \dots, x_k\}$ של $[a,b]$ נגדיר $\sigma_\pi = \sum\limits_{i=1}^{k} f(\gamma(\tau_i))\Delta s_i$

כאשר $\tau_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ו- Δs_i האורך של הקשת $(\gamma(x_{i-1}), \gamma(x_i))$.

אם קיים הגבול $I = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sigma\pi$ שאינו תלוי בחלוקה ובבחירת הנקודות τ_i אזי הוא נקרא <u>האינטגרל של f מעל γ לפי אורך</u>.

נסמן אותו על ידי $I = \int\limits_\gamma f(x)ds$.

קוראים לזה גם <u>אינטגרל קווי מסוג ראשון</u>.

<u>דוגמה</u>: נניח ש-Γ היא תיל דק. מהי המסה של התיל?

נניח שההצגה של Γ היא $\gamma(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^3$.

אם התיל בעל צפיפות מסה קבועה c, אזי המסה שווה ל $c \cdot L(\Gamma)$.

נניח שהצפיפות נתונה על ידי פונקציה $f(x)$.

נחלק את הקטע $[a,b]$ לתתי-קטעים $[x_{i-1}, x_i]$.

נקבל שהמסה שווה בערך ל- $\sum\limits_i f(\gamma(\tau_i))\Delta s_i$ כאשר $\tau_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

אם $\max \Delta x_i \to 0$ נקבל שהמסה שווה ל- $\int\limits_\gamma f(x)ds$.

<u>הערה</u>: אם יש לנו קטע $[a,b]$ ונקודה בקטע $c \in (a,b)$.

נסמן:

$\gamma_1 = \gamma|_{[a,c]}$

$\gamma_2 = \gamma|_{[c,b]}$

אם γ בעלת אורך אזי גם γ_1, γ_2 בעלות אורך ומתקיים $L(\gamma_1) + L(\gamma_2) = L(\gamma)$.

אם γ גזירה ברציפות למקוטעין אזי היא בעלת אורך ו- $L(\gamma) = \int\limits_a^b ||\gamma'(t)||dt$.

<u>הערה</u>: בתוך ההוכחה על אדיטיביות האורך הוכחנו גם שאם γ_1 ו- γ_2 בעלות אורך אזי גם γ.

$L(\pi, \gamma) \le L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$.

משפט: אם $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ היא עקומה גזירה ברציפות למקוטעין ו־f פונקציה רציפה על $\gamma([a,b])$ אזי האינטגרל $\int\limits_\gamma f(x)ds$ קיים ו-

$$\int\limits_\gamma f(x)ds = \int\limits_a^b f(\gamma(t))||\gamma'(t)||dt$$

הוכחה: תהי $\pi = \{x_0, \ldots, x_m\}$ חלוקה של $[a,b]$. נתבונן ב- $\sigma_\pi = \sum\limits_i f(\gamma(\tau_i))\Delta s_i$.

לפי המשפט הקודם, מתקיים $\Delta s_i = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} ||\gamma'(t)||dt$.

לכן, אם נסמן $I = \int\limits_a^b f(\gamma(t))||\gamma'(t)||dt$ אזי

$$\bigstar\ ||\sigma_\pi - I|| = |\sum_i \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} [(f(\gamma(\tau_i)) - f(\gamma(t)))]\ ||\gamma'(t)||dt|$$

$$\leq \sum_i \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} |f(\gamma(\tau_i)) - f(\gamma(t))||\gamma'(t)||dt|$$

נשתמש בכך ש- $f(\gamma(t))$ רציפה במ"ש. יהי $\epsilon > 0$ נתון!

קיים $\delta > 0$ כך שאם $\Delta x_i < \delta$ אזי לכל $t, \tau_i \in [x_{i-1}, x_i]$

מתקיים $|f(\gamma(\tau_i)) - f(\gamma(t))| < \epsilon$. נבחר חלוקה π עם $\Delta x_i < \delta$.

אזי לפי $\bigstar$ נקבל כי $|\sigma_\pi - I| < \epsilon \sum\limits_i \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} ||\gamma'(t)||dt = \epsilon L(\gamma)$.

לפי ההגדרה זה אומר ש- $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sigma_\pi = I$. $\blacksquare$

דוגמה: חשב את $I = \int\limits_\gamma (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}})ds$

כאשר γ היא האסטרואידה $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $a > 0$.

ההצגה של γ היא $\gamma(t) = (a\cos^3(t), a\sin^3(t)) \quad t \in [0, 2\pi],$.

$\Downarrow$

$$||\gamma'(t)|| = \sqrt{(3a\cos^2(t)(-\sin(t)))^2 + (3a\sin^2(t)\cos(t))^2}$$
$$= 3a\sqrt{\cos^4(t)\sin^2(t) + \sin^4(t)\cos^2(t)}$$
$$= 3a\sqrt{\cos^2(t)\sin^2(t)} = 3a|\cos(t)\sin(t)|$$

לכן

$$I = 3a\int\limits_0^{2\pi} a^{\frac{3}{4}}(\cos^4(t) + \sin^4(t))3a\,|\cos(t)\sin(t)|dt$$
$$= 12a^{\frac{7}{3}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4(t) + \sin^4(t))3a\,|\cos(t)\sin(t)|dt$$
$$= 2a^{\frac{7}{3}}(\sin^6 - \cos^6)|_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \boxed{4a^{\frac{7}{3}}}$$

למה: תהי $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ עקומה בעלת אורך. נניח ש-f אינטגרבילית מעל γ.

נסמן: $\gamma_1 = \gamma|_{[a,c]}$ ו- $\gamma_2 = \gamma|_{[c,b]}$ כאשר $c \in (a, b)$.

אזי f אינטגרבילית מעל γ_1 ו- γ_2 ומתקיים $\int\limits_\gamma f(x)ds = \int\limits_{\gamma_1} f(x)ds + \int\limits_{\gamma_2} f(x)ds$.

הוכחה: דומה לאדיטיביות האינטגרל ולכן מושארת כתרגיל בית):

אינפי 4 – הרצאה 3

ליאור פולק

28 במרץ 2016

<u>למה</u>: נניח כי $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n,\ \gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ הן עקומות גזירות ברציפות למקוטעין, ומתקיים כי $\gamma_2(t) = \gamma_1(\varphi(t))$ כאשר φ גזירה ברציפות, מונוטונית ו- $\varphi([c,d]) = [a,b]$.

אם f רציפה על $\gamma_1([a,b])$ אזי $\int\limits_{\gamma_1} f(x)ds = \int\limits_{\gamma_2} f(x)ds$.

<u>הוכחה</u>: מתקיים

$$\int\limits_{\gamma_1} f(x)ds \underbrace{=}_{\text{WE PROVED}} \int\limits_a^b f(\gamma_1(t))||\gamma_1'(t)||dt \underbrace{=}_{\text{SWAPPING } t=\varphi(t)}$$

$$\int\limits_a^b f(\gamma_1(\varphi(t)))\ ||\gamma_1'(\varphi(t))||\ |\varphi'(t)|dt \underbrace{=}_{\text{CHAIN RULE}}$$

$$= \int\limits_a^b f(\gamma_1(\varphi(t)))\ ||\gamma_1(\varphi(t))'||\ dt = \int\limits_c^d f(\gamma_2(t))||\gamma_2'(t)||dt = \boxed{\int\limits_{\gamma_2} f(x)ds}\ \blacksquare$$

1 תבנית דיפרנציאלית לינארית

נניח $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה ונניח ש $f : \Omega \to \mathbb{R}$ דיפרנציאבילית ב- Ω.
נניח $x_0 \in \Omega$. הדיפרנציאל של f ב-x_0 הוא פונקציה לינארית שמוגדרת על-ידי
$\mathrm{d}f(x_0)(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)\xi_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)\xi_2 \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\xi_n$

כך שמתקיים $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-\mathrm{d}f(x_0)(h)}{||h||} = 0$.

הגדרה 1: תהי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה. העתקה שלכל $x \in \Omega$ מתאימה פונקציה לינארית על $\mathbb{R}^n$ נקראת תבנית דיפרנציאלית לינארית.
הגדרה 2: נסמן על-ידי $\mathrm{d}x_i$ תבנית דיפרנציאלית לינארית שמוגדרת על-ידי
$\mathrm{d}x_i(x, \xi) = \xi_i$.

$\hookleftarrow$ בקורס שלנו לא נתעסק עם תבניות שאינן לינאריות. נקרא מעתה אפוא לתבנית דיפרנציאלית לינארית בשם תבנית דיפרנציאלית.

נניח ש- ω היא תבנית דיפרנציאלית על $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. נאמר שלכל $x \in \Omega$, $\omega(x)$ היא פונקציה לינארית על $\mathbb{R}^n$. נרשום את ω בצורה הבאה:
$\omega(x,\xi) = \omega_1(x)\xi_1 + \ldots \omega_n(x)\xi_n =$
$\boxed{\omega_1 \, \mathrm{d}x_1 + \ldots \omega_n \, \mathrm{d}x_n}$

זוהי הצורה הכללית של תבנית דיפרנציאלית לינארית. כאן $\omega_i : \Omega \to \mathbb{R}$.

נניח ש- $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, ז"א $F = (F_1, \ldots F_n)$ כאשר $F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
ל-F קוראים שדה וקטורי.
יש התאמה בין שדה וקטורי F ותבנית $\omega = F_1 \, \mathrm{d}x_1 + \ldots F_n \, \mathrm{d}x_n$.

למשל, יש התאמה בין התבנית $\mathrm{d}f$ ושדה $\nabla f = \operatorname{grad} f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}(x))$.

<u>הגדרה 3</u>: נאמר שהתבניות $\omega = \omega_1 \,\mathrm{d}x_1 + \dots \omega_n \,\mathrm{d}x_n$ ו- $\eta = \eta_1 \,\mathrm{d}x_1 + \dots \eta_n \,\mathrm{d}x_n$ <u>שוות</u> אם $\omega_i = \eta_i$ לכל x ולכל $i = 1, \dots, n$.

<u>הגדרה 4</u>: תבנית ω על $\omega \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת <u>מדוייקת</u> אם קיימת פונקציה דיפרנציאבילית f על ω כך ש- $\mathrm{d}f = \omega$.

במילים אחרות, זה אומר ש- $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \omega_i$ לכל $i = 1, \dots, n$.

<u>הערה</u>: באופן דומה אומרים ש- $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ היא <u>שדה משמר</u> אם קיימת f כך ש- $\nabla f = F$.

<u>הגדרה 5</u>: נאמר ש- $\omega \in \mathrm{C}^k(\Omega)$ אם $\omega_i \in \mathrm{C}^k(\Omega)$ לכל $i = 1, \dots, n$.

<u>הגדרה 6</u>: תהי $\omega \in \mathrm{C}^1(\Omega)$. נאמר שהיא <u>סגורה</u> אם $\frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} = \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}$ לכל $i, j = 1, \dots, n$.

למשל, $\omega = P \,\mathrm{d}x + Q \,\mathrm{d}y$ סגורה אם $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

<u>למה</u>: אם $\omega \in \mathrm{C}^1$ מדוייקת אזי היא סגורה.

<u>הוכחה</u>: לפי ההגדרה, קיימת f כך ש-$\mathrm{d}f = \omega$, ז"א $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \omega_i$.

מכאן נובע ש- $f \in \mathrm{C}^2$. לכן,

$\frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_j}) \underbrace{=}_{f \in \mathrm{C}^2} \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i}) = \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}$. ■

מכאן באופן טבעי נשאל האם זה אם ורק אם?

<u>דוגמה</u>: נגדיר $\omega = -\frac{y}{x^2+y^2} \,\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2} \,\mathrm{d}y,\ \Omega = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

אזי קל לבדוק (או במילים אחרות זה יופיע כשאלת הוכחה במבחן) ש-ω סגורה.

נראה שהיא לא מדוייקת.

בקואורדינטות קטביות נתאר נקודה במישור בתור זווית ורדיוס.

בקבוצה $\Omega_1 = \mathbb{R}^2 \backslash \left([0, \infty) \times \{0\}\right)$

נגדיר:

$$\theta(x, y) = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & x, y > 0, \\ \pi + \arctan(\frac{y}{x}) & x < 0,\ y \in \mathbb{R} \\ 2\pi + \arctan(\frac{y}{x}) & x > 0,\ y < 0, \\ \frac{\pi}{2} & x = 0,\ y > 0, \\ \frac{3\pi}{2} & x = 0,\ y < 0. \end{cases}$$

מתקיים $\mathrm{d}\theta = \omega$, דהיינו ω מדוייקת על Ω_1.

אם היא מדוייקת גם על Ω אזי מתקיים שיש פונקציה f דיפרנציאבילית על Ω כך ש- $\mathrm{d}f = \omega$.

מכאן נובע ש- $\mathrm{d}(f - \theta) = 0$ על Ω_1.

כיוון ש- Ω_1 קשירה, מקבלים $f = \theta + c$.

אבל מתקיים $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0), y > 0} \theta(x, y) = 0$ ו- $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0), y < 0} \theta(x, y) = 2\pi$ לכל $x > 0$.

ז"א f לא רציפה על $[0, \infty)$.

זו סתירה לכך שמתקיים כי f דיפרנציאבילית על Ω.

<u>הגדרה 7</u>: תהי $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ עקומה גזירה ברציפות למקוטעין. נניח ש- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ו- $\gamma[a,b] \subseteq \Omega$.
אם ω תבנית רציפה ב-Ω אזי האינטגרל שלה מעל γ <u>(אינטגרל קווי מסוג שני)</u> מוגדר על-ידי

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \omega_1\, \mathrm{d}x_1 + \ldots + \omega_n\, \mathrm{d}x_n = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b \omega_i(\gamma(t)) \cdot \gamma_i'(t)dt.$$

עוד רושמים כך: $$\boxed{\int_a^b \omega(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt} = \int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{r} = \int_\gamma (F \cdot e)ds.$$

אפשר לרשום $\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b \omega_i(\gamma(t)) \frac{\gamma_i'(t)}{||\gamma'(t)||} ||\gamma'(t)||dt$

ואם נסמן $e = (\frac{\gamma_1'(t)}{||\gamma'(t)||}, \ldots, \frac{\gamma_n'(t)}{||\gamma'(t)||})$ וגם $F = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ אזי נקבל כי

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot e||\gamma'(t)||dt = \int_\gamma (F \cdot e)ds.$$

<u>דוגמה</u>: (המשמעות הפיזיקלית של $\int_\gamma \omega$)
נניח ש- $\omega = (F_1, \ldots, F_n)$ שדה כח שמזיז חלקיק לאורך העקומה γ.
השאלה: מהי העבודה של ω?
נשתמש בעובדה פיזיקלית לפיה אם כח $\vec{F}$ הוא קבוע, ומזיז חלקיק לאורך וקטור $\vec{r}$ אזי העבודה שווה ל-$\vec{F} \cdot \vec{r}$
(במקרה שלנו זה שווה ל $F(\gamma(t)) \cdot (\gamma(b) - \gamma(a))$).
אם הכח F לא קבוע אזי נחלק את $[a,b]$ לתתי-קטעים $[t_{i-1}, t_i]$ ונקבל שהעבודה שווה בקירוב טוב ל-
$\sum_i F(\gamma(t_i)) \cdot (\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i))$.
בנוהל, $\max_i(t_{i+1} - t_i) \to 0$. נקבל אפוא:

$$\lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum F(\gamma(t_i)) \cdot (\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)) = \int_a^b \sum_{j=1}^{n} F_j(\gamma(t))\gamma_j'(t)dt = \int_\gamma \omega$$

1.1 תכונות האינטגרל הקווי מסוג שני

1. לינאריות: $\int\limits_\gamma(\alpha\omega+\beta\eta)=\alpha\int\limits_\gamma\omega+\beta\int\limits_\gamma\eta$

2. אדיטיביות: אם $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ ו- $\gamma_1=\gamma|_{[a,c]},\ \gamma_2=\gamma|_{[c,b]}$
אזי $\int\limits_\gamma\omega=\int\limits_{\gamma_1}\omega+\int\limits_{\gamma_2}\omega$ כאשר $c\in(a,b)$

3. אם γ_1 ו-γ_2 עקומות שקולות אזי $\int\limits_{\gamma_1}\omega=\int\limits_{\gamma_2}\omega$

4. נניח ש-$\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ ו $(-\gamma):[a,b]\to\mathbb{R}^n$
מוגדרת על-ידי $(-\gamma)(t)=\gamma(a+b-t)$ אזי $\int\limits_{(-\gamma)}\omega=-\int\limits_\gamma\omega$
<u>הוכחה</u>: מתקיים

$$\int\limits_{(-\gamma)}\omega=\sum_{j=1}^{n}\int\limits_a^b\omega_j(\gamma(a+b-t))(-\gamma_j'(a+b-t))dt$$
$$=-\sum_{j=1}^{n}\int\limits_a^b\omega_j(\gamma(t))\gamma_j'(t)dt=-\int\limits_\gamma\omega$$

<u>משפט 1</u>: תהי ω תבנית רציפה על קבוצה פתוחה וקשירה $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$. אזי התנאים הבאים שקולים:

1. ω מדוייקת

2. $\int\limits_\gamma\omega=0$ לכל עקומה סגורה וגזירה ברציפות למקוטעין עם תמונה ב-Ω

3. לכל עקומות γ_1 ו- γ_2 עם קצוות משותפים (עם תמונות ב-γ) מתקיים: $\int\limits_{\gamma_1}\omega=\int\limits_{\gamma_2}\omega$

אינפי 4 – הרצאה 4

ליאור פולק

20 במרץ 2016

ראשית, תזכורת:

<u>משפט 1</u>: תהי ω תבנית רציפה על קבוצה פתוחה וקשירה $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. אזי התנאים הבאים שקולים:

1. ω מדוייקת
2. $\int\limits_{\gamma} \omega = 0$ לכל עקומה סגורה וגזירה ברציפות למקוטעין עם תמונה ב-Ω
3. לכל עקומות γ_1 ו- γ_2 עם קצוות משותפים (עם תמונות ב-γ) מתקיים: $\int\limits_{\gamma_1} \omega = \int\limits_{\gamma_2} \omega$

<u>הוכחה</u>: נוכיח ש1 $\Leftarrow$ 2 $\Leftarrow$ 3.

1 $\Leftarrow$ 2:

קיימת פונקצייה f דיפרנציאבילית ב-Ω כזאת ש- $\mathrm{d}f = \omega$.

לפי כלל השרשרת,

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \omega(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

לכל $t \in [a, b]$ פרט אולי למספר סופי של נקודות (למקוטעין).

לפי משפט ניוטון-לייבניץ,

$$\int\limits_{\gamma} \omega = \int\limits_{a}^{b} \omega(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int\limits_{a}^{b} \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0$$

מכיוון ש- $\gamma(b) = \gamma(a)$.

2 $\Leftarrow$ 3:

נגדיר $\gamma = \gamma_1 \cup (-\gamma_2)$.

אזי γ היא עקומה סגורה (הקצוות של שתי העקומות שווים, לפי הנתון).

לפי 2, $\int\limits_{\gamma} \omega = 0$. מצד שני, $\int\limits_{\gamma} \omega = \int\limits_{\gamma_1} \omega - \int\limits_{\gamma_2} \omega$.

3 $\Leftarrow$ 1:

נקבע נקודה כלשהי $x_0 \in \Omega$ ונגדיר $f(x) = \int\limits_{\gamma(x_0, x)} \omega$ כאשר $\gamma(x_0, x)$ עקומה כלשהי שמחברת את x_0 ו-x.

מספיק להוכיח כי $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \omega_i$ $\forall i = 1, \ldots, n$.

מכאן נקבל גם ש-f דיפרנציאבילית.

נקבע $x \in \Omega$.

נניח ש- $t \in \mathbb{R}$ ו- $|t|$ די קטן כך שיתקיים $x + te_i \in \Omega$ (זה אפשרי מכיוון ש-Ω קבוצה פתוחה).

נתבונן ב- $\int\limits_{\Gamma} \omega = f(x+te_i) - f(x)$, כאשר Γ היא עקומה כלשהי שמחברת את x ו- $x+te_i$. נבחר את Γ בתור הקטע הישר שמחבר את x ו- $x+te_i$. במקרה כזה, ההצגה הפרמטרית של Γ היא $\gamma(s) = x + se_i, \ \ s \in [0,t]$.

נקבל ש- $\int\limits_{\Gamma} \omega = \int\limits_0^t \omega(x+se_i)\cdot e_i\,ds = \int\limits_0^t \omega_i(x+se_i)\,ds$.

לכן $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{f(x+te_i)-f(x)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega_i(x+se_i)ds = \omega_i(x)$

כי אם נסמן $r(t) = \int\limits_0^t \omega_i(x+se_i)ds$ אזי נקבל שהגבול הזה שווה ל- $r'(0) = \omega_i(x)$ לפי לופיטל. ■

<u>דוגמה</u>: נגדיר $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ בקבוצה $\mathbb{R}\backslash\{(0,0)\}$ ונראה כי ω לא מדויקת.

אם $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)), t\in[0,2\pi]$ אזי $\int\limits_{\gamma}\omega = \int\limits_0^{2\pi}(-\sin(t)(-\sin(t)) + \cos(t)\cos(t))dt = 2\pi$ ולכן ω לא מדויקת (כי מעגל היחידה שמתואר בפרמטריזציה כאן הוא עקומה סגורה).

<u>הערה</u>: קיבלנו שאם ω מדוייקת ו-$\mathrm{d}f = \omega$ אזי $\int\limits_{\gamma}\omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.

כמו כן, f ניתנת למציאה על-ידי ω $f(x) = \int\limits_{\gamma(x,x_0)}$.

<u>הגדרה 1</u>: קבוצה פתוחה $\Omega\in\mathbb{R}^n$ נקראת <u>כוכבית</u> אם קיימת $x_0\in\Omega$ כך שלכל $x\in\Omega$, הקטע הישר $[x,x_0]$ מוכל ב-Ω.

<u>הגדרה 2</u>: קבוצה היא <u>קמורה</u> אם לכל שתי נקודות בקבוצה, הקטע ביניהן מוכל בה.

<u>הערה</u>: כל קבוצה קמורה היא כוכבית ביחס לכל נקודה שלה.

<u>למה</u>: (פואנקרה)

תהי $\Omega\in\mathbb{R}^n$ קבוצה כוכבית. אזי כל תבנית סגורה $\omega\in C^1(\Omega)$ היא מדויקת.

<u>הוכחה</u>: בה"כ, תהי $0\in\Omega$ הכוכב של Ω (אפשר להזיז את הצירים, לדוגמה).

נגדיר $f(x) = \int\limits_{[0,x]}\omega$. נשים לב שבחרנו בקטע הישר שבין הנקודות, שבוודאי נמצא ב-Ω לפי הנתון.

ההצגה של $[0,x]$ היא $\gamma(t) = tx, \ \ t\in[0,1]$.

אזי נקבל ש-

$$f(x) = \int\limits_0^1 \omega(tx)\cdot x dt = \sum_{j=1}^n\int\limits_0^1 \omega_j(tx)\cdot x_j dt$$

כמו בהוכחת המשפט הקודם, מ"ל $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \omega_i(x)$.

מתקיים $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^n\int\limits_0^1\frac{\partial}{\partial x_i}(\omega_j(tx)\,x_j)dt$,

וגם $\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(\omega_j(tx)\,x_j) = \sum_{j=1}^n(\frac{\partial\omega_j}{\partial x_i}(tx)tx_j + \omega_j(tx)\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j)) = \sum_{j=1}^n(\frac{\partial\omega_j}{\partial x_i}(tx)tx_j) + \omega_i(tx)$

אבל ω סגורה, ולכן נחליף אינדקסים בגזירה-

$$\sum_{j=1}^n(\frac{\partial\omega_i}{\partial x_j}(tx)tx_j) + \omega_i(tx)$$

ששווה לפי כלל השרשרת ל- $\frac{d}{dt}(t\omega_i(tx))$.

לכן,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \int\limits_0^1\frac{d}{dt}(t\omega_i(tx))dt = t\omega_i(tx)\Big|_0^1 = \omega_i(x) \quad ■$$

הערה: נניח ש- $\omega = Pdx + Qdy$ תבנית סגורה בקבוצה כוכבית $\Omega \in \mathbb{R}^2$.

אזי לפי המשפטים הקודמים, ω מדוייקת ועבור $f(x) = \int\limits_{\gamma(x,x_0)} \omega$ נקבל ש-$\mathrm{d}f = \omega$.

ניקח $\gamma(x, x_0)$ כשני קווים שבורים, Γ_1 שקבוע על ציר x ו-Γ_2 שקבוע על ציר y. נקבל ש-

$f(x) = \int\limits_{\Gamma_1} \omega + \int\limits_{\Gamma_2} \omega = \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, t)dt + \int\limits_{x_0}^{x} P(t, y)dt$ (אין כאן טעות, בפעם הראשונה האיקס קבוע, ואילו בפעם השנייה זהו לא y_0 כי אם y).

דוגמה: נניח ש- $\omega = -\frac{y}{(x-y)^2}dx + \frac{x}{(x-y)^2}dy$ בקבוצה $\Omega = \{(x, y) : y < x\}$. האם ω מדוייקת? מצא את f כך ש-$\mathrm{d}f = \omega$.

הוכחה: התחום המדובר הוא חצי מישור, וזהו תחום קמור (ומשכך כוכבי). ניתן גם לבדוק ש-ω סגורה (ובמבחן צריך להוכיח ממש!).

לכן, לפי למת פואנקרה, ω מדוייקת בתחום. נבחר את הכוכב בנקודה $(0, -1)$. תהי נקודה אחרת (x, y) בתחום. לפי ההערה, נקבל ש-

$$f(x, y) = \int\limits_{\Gamma_1} \omega + \int\limits_{\Gamma_2} \omega = \int\limits_{0}^{x} \frac{1}{(t+1)^2}dt + \int\limits_{-1}^{y} \frac{x}{(x-t)^2}dt = \frac{x}{(x-y)}.$$

המשך לדוגמה: חשב את $\int\limits_{\Gamma} \omega$ כאשר Γ היא עקומה כלשהי המחברת את $A = (0, -1)$ ואת $B = (1, 0)$ בכיוון מ-A ל-B.

נשתמש במשפט שאומר שהאינטגרל לא תלוי בבחירת העקומה עצמה אלא בנקודות הקצה שלה (מכיוון ש-ω מדוייקת). מתקיים אפוא ש-

$$\int_\Gamma \omega = f(B) - f(A) = \frac{1}{1-0} - \frac{0}{0-(-1)} = 1$$

1 משפט (גרין)

תהי $G \subset \mathbb{R}^2$ קבוצה פתוחה, קשירה וחסומה כזאת שהשפה שלה היא ∂G היא איחוד סופי של עקומות פשוטות, סגורות, גזירות ברציפות למקוטעין וזרות בזוגות.

יהיו P, Q פונקציות גזירות ברציפות על $\overline{G}$ (הסגור של G). אזי

$$\int\limits_{\partial G} Pdx + Qdy = \iint_G (\tfrac{\partial Q}{\partial x} - \tfrac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

כאשר האוריינטציה על ∂G נקבעת על פי כך שאם עוקפים את ∂G אזי הקבוצה G נשארת משמאל.

<u>הוכחה</u>: מספיק להוכיח ש-

$$1)\ \int\limits_{\partial G} Pdx = -\iint_G (\tfrac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

$$2)\ \int\limits_{\partial G} Qdy = \iint_G (\tfrac{\partial Q}{\partial x})dxdy$$

נקרא ל-G <u>תחום פשוט</u> אם ניתן לתאר את G על ידי $G = \{(x,y):\ \varphi(x) < y < \psi(x),\ x \in [a,b]\}$ וגם $G = \{(x,y):\ \alpha(y) < x < \beta(y),\ y \in [c,d]\}$, כאשר $\alpha, \beta, \psi, \varphi$ גזירות ברציפות למקוטעין.

נוכיח את 1 עבור תחום פשוט.

מתקיים-

$$\iint_G \tfrac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int\limits_a^b \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \tfrac{\partial P}{\partial y}dydx = \int\limits_a^b P(x,\psi(x))dx - \int\limits_a^b P(x,\varphi(x))dx$$

מצד שני,

$$\int Pdx = \sum_{j=1}^{4} \int\limits_{\gamma_j} Pdx = \int\limits_{\gamma_1} Pdx + \int\limits_{\gamma_2} Pdx$$

ההצגה של γ_1 היא $\gamma_1(t) = (t,\varphi(t)), t \in [a,b]$

ההצגה של $-\gamma_2$ היא $-\gamma_2(t) = (t,\psi(t)), t \in [a,b]$

מתקיים

$$\int\limits_{\gamma_1} Pdx = \int\limits_a^b P(t,\varphi(t))dt,\ \int\limits_{-\gamma_2} Pdx = \int\limits_a^b P(t,\psi(t))dt$$

ולכן

$$\int\limits_{\gamma_1} Pdx + \int\limits_{\gamma_2} Pdx = \int\limits_{\gamma_1} Pdx - \int\limits_{-\gamma_2} Pdx = \int\limits_a^b P(t,\varphi(t))dt - \int\limits_a^b P(t,\psi(t))dt = -\iint_G \tfrac{\partial P}{\partial y}dxdy$$

באותו אופן מוכיחים את 2 (בעזרת ההצגה השנייה של G).

אזי הוכחנו את המשפט עבור תחום פשוט.

אינפי 4 – הרצאה 5

ליאור פולק

27 במרץ 2016

1 משפט גרין

כפי שראינו בשבוע שעבר, תהי $G \subset \mathbb{R}^2$ קבוצה פתוחה, קשירה וחסומה כזאת שהשפה שלה היא ∂G היא איחוד סופי של עקומות פשוטות, סגורות, גזירות ברציפות למקוטעין וזרות בזוגות.
יהיו P, Q פונקציות גזירות ברציפות על $\overline{G}$ (הסגור של G). אזי

$$\int\limits_{\partial G} Pdx + Qdy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

כאשר האוריינטציה על ∂G נקבעת על פי כך שאם עוקפים את ∂G אזי הקבוצה G נשארת משמאל.

נתקדם למקרה כללי יותר. נניח ש-G כזאת שניתן לחלק אותה לשתי קבוצות פשוטות (לזה קראנו בשיעור שעבר תחום פשוט), $G = G_1 \cup G_2$. בציור שבלוח ניתן לראות ששתי הקבוצות משיקות בעקומה Γ, ולכן אנו בעצם עוברים על Γ פעמיים בשני כיוונים שונים. לכן,

$$\iint\limits_G \underbrace{=}_{\text{Additivity of the integral}} \iint\limits_{G_1} + \iint\limits_{G_2} \underbrace{=}_{\text{Green}} \int\limits_{\partial G_1} + \int\limits_{\partial G_2} = \int\limits_{\partial G}$$

וזה מכיוון ש- $\int\limits_{\Gamma} + \int\limits_{-\Gamma} = 0$.

לפי אינדוקציה, מקבלים את המשפט כאשר ניתן לחלק את G למספר סופי של קבוצות פשוטות.

באופן מפתיע, זה החלק בו עוברים להוכחה פיזיקלית- המשפט הוא בעיקרון טכני, ולכן אנו מוכיחים אותו עד לכאן (כפי שמוכח גם בעוד הרבה ספרים), ואת ההוכחה הכללית נשאיר כתרגיל (קל) לקורא (למבחן).

במקרה הכללי, קיימת סדרה של עקומות Γ_n כך ש-Γ_n היא קו שבור ו- $\int\limits_{\Gamma_n} \to \int\limits_{\partial G}$.

נסמן את התחום הפנימי ביחס ל-Γ_n על-ידי G_n. אזי הקבוצה G_n היא מצולע. נשתמש בעובדה הגיאומטרית לפיה ניתן לחלק כל מצולע למספר סופי של משולשים. כל משול הוא קבוצה פשוטה.

P ו-Q גזירות ברציפות ב-$\overline{G}$, דהיינו P ו-Q מוגדרות בקבוצה פתוחה Ω כזאת ש- $\overline{G} \subset \Omega$.

נקבל אפוא $\iint\limits_{G_n} = \int\limits_{\Gamma_n}$ ושמתקיים $\iint\limits_{G_n} \to \iint\limits_{G}$.

נניח ש-G היא כזאת ש- $\partial G = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. כמו קודם, נקבל שניתן לחלק את G לשתי קבוצות G_1 ו-G_2 כך שהן מקיימות את התנאים של המקרה הקודם. על השפה הפנימית (השפות המשיקות) עוברים פעמיים בכיוונים מנוגדים, ולכן הם מתקזזים (=0).

במקרה בו $\partial G = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Gamma_i$, מוכיחים באינדוקציה.

דוגמה: חשב $I=\int\limits_{\partial G} xydx+(x^2+y^2)dy$ כאשר $G=[0,2]\times[1,3]$ והאוריינטציה על ∂G היא נגד כיוון השעון.

פתרון:

לפי משפט גרין,

$$I=\int\limits_1^3\int\limits_0^2 xdydx=4$$

דוגמה: חשב $I=\int\limits_{\partial G} xy^2dx+(\arctan(\log(y+3))-x)dy$ כאשר $G=\{x^2+y^2\leq 1\}$ והאוריינטציה על ∂G היא עם כיוון השעון.

פתרון:

מתקיים

$$I=\iint\limits_G(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})dxdy=\iint\limits_G(2xy+1)dxdy=\int\limits_0^1\int\limits_0^1(1+2r^2\cos(\theta)\sin(\theta)rdrd\theta$$

אבל האינטגרל על θ הוא אינטגרל על מחזור, ולכן מתאפס.

לכן האינטגרל שווה π.

דוגמה: בעזרת משפט גרין חשב את $I=\int\limits_\gamma Pdx+Qdy$ כאשר $\gamma=\{x^2+y^2=1,x\geq 0\}$ מכוונת מלמטה למעלה.

פתרון:

נשים לב שהעקומה לא סגורה, ולכן נצטרך לסגור אותה. נשלים אותה על-ידי הקטע $[-1,1]$ על ציר ה-y מלמעלה למטה. נסמן את התחום שכלוא בעקומה הסגורה ב-G.

מתקיים

$$I=\int\limits_{\gamma\cup L}-\int\limits_L=\iint\limits_G+\int\limits_{-1}^1 Q(0,t)dt$$

שימוש חשוב למשפט גרין הוא חישוב שטחים.

נניח שבמשפט גרין $Q=x$ ו-$P=0$. אזי נקבל

$$\underbrace{m(G)}_{\text{Area of G}}=\int\limits_{\partial G} xdy.$$

באופן דומה, אם $Q=0$ ו-$P=-y$ נקבל

$$m(G)=\int\limits_{\partial G}-ydx.$$

על-ידי חיבור נובע $m(G)=\frac{1}{2}\cdot(\int\limits_{\partial G} xdy-ydx)$.

דוגמה: חשב את שטח האליפסה $G=\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\}$

פתרון:

ההצגה של ∂G היא $\gamma(t)=(a\cos(t),b\sin(t)),\quad t\in[0,2\pi]$

ולכן נקבל

$m(G)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(ab\sin^2(t)+ab\cos^2(t))dt=\pi ab$ כאשר הצבנו במקום dx,dy את dt המתאים כמו בשיטת ההצבה מאינפי 2.

דוגמה: חשב את שטח התחום החסום על-ידי האסטרואידה $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$

פתרון:

ההצגה היא $\gamma(t)=(a\cos^3(t),a\sin^3(t)) \quad t\in[0,2\pi],$

מקבלים ש-

$$m(G)=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(3\cos^2(t)\sin^4(t)+3\sin^2(t)\cos^4(t))dt=\ldots=\frac{3\pi}{8}a^2$$

למה: נניח שפונקציה u היא הרמונית ($\Delta u=0$) בעיגול היחידה. אם $u\equiv 0$ על ∂G אזי $u\equiv 0$ ב-G.

הוכחה: נגדיר $P=-u\frac{\partial u}{\partial y}, Q=u\frac{\partial u}{\partial x}$. מתקיים $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=(\frac{\partial u}{\partial x})^2+u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(\frac{\partial u}{\partial y})^2+u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\underbrace{=}_{\Delta u=0}(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2$.

לכן לפי גרין

$$\iint\limits_G(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2dxdy=\int\limits_{\partial G}u(-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy)=0$$

לכן $\frac{\partial u}{\partial x}=0$, $\frac{\partial u}{\partial y}=0 \Leftarrow u=c$. אבל $u\equiv 0$ על השפה והיא רציפה, ולכן $u\equiv 0$ ב-G.

2 משטחים

הגדרה 1: משטח 2–מימדי ב–$\mathbb{R}^3$ הוא קבוצה $M \subset \mathbb{R}^3$ שניתנת לתיאור באופן מקומי כגרף של פונקציה $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

הגדרה 2: תהי $P \in M$. הסביבה של P ב–M היא קבוצה מהצורה $B(p,r) \cap M$ כאשר $r > 0$ ו–$B(p,r)$ כדור פתוח שמרכזו ב–p ורדיוסו r.

הגדרה 3: הגרף של פונקציה $z = f(x,y), (x,y) \in G$
הוא קבוצה מהצורה $\{(x,y,z) : z = f(x,y), (x,y) \in G\}$.

הערה: אם הפונקציה בהגדרה היא מ- $\mathbf{C}^p$ אזי אומרים שהמשטח M הוא מ- $\mathbf{C}^p$.

הגדרה 4: נתבונן בפונקציה $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. נאמר שנקודה $P \in \mathbb{R}^3$ היא נקודה רגולרית של F אם $F(P) = 0$ ו- $\nabla F(P) \neq 0$.

למה: סביב נקודה רגולרית ניתן להגדיר משטח 2–מימדי כקבוצת האפסים של פונקציה, ז"א $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = 0\}$.
הוכחה: נניח $F)P) = 0$ ו- $\nabla F(P) \neq 0$.
בה"כ נניח ש- $\frac{\partial F}{\partial z}(P) \neq 0$. ממשפט הפונקציה הסתומה (הלו אינפי 3) נובע שקיימת סביבה של P שבה מתקיים $F(x,y,z) = 0$ אם ורק אם $z = f(x,y)$. ■

הערה: נניח שבסביבה של $P \in M$ מתקיים $z = f(x,y)$. אזי אם נגדיר $F(x,y,z) = f(x,y) - z$ נקבל שניתן לתאר סביבה זו כ- $\{F = 0\}$, כאשר P היא נקודה רגולרית.

הגדרה 5: יהיו $A \subset \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^m$.
העתקה $f : A \to B$ נקראת הומיאומורפיזם (הלו מופשטת 1, איזה צחוקים שיש היום מועד ב אה?) אם f רציפה, חח"ע ו $f^{-1} : B \to A$ רציפה.

נתבונן בהומיאומורפיזם $r : G \to \mathbb{R}^3$ כאשר $G \subset \mathbb{R}^2$ קבוצה פתוחה. נרשום:

$$r(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$$

<u>הגדרה 6</u>: נקודה $r(x_0,y_0)$ נקראת <u>רגולרית</u> אם $rank\ r'(u_0,v_0)=2$, ז"א
$$rank\left.\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}\right|_{(u_0,v_0)}=2.$$

<u>למה</u>: סביב נקודה רגולרית ניתן להגדיר משטח 2–מימדי כתמונה $r(G)$ כאשר $r:G\to\mathbb{R}^3$ הומיאומורפיזם ו- $G\subset\mathbb{R}^2$.

<u>הוכחה</u>: נניח ש- $rank\ r'(u_0,v_0)=2$.
בה"כ נניח ש-
$$\left|\left.\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}\right|_{(u_0,v_0)}\right|\neq 0$$
לפי משפט הפונקציה ההפוכה, קיימת סביבה של $P_0=r(u_0,v_0)$ כזאת שבה המערכת $\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$

שקולה ל- $\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}$.

לכן בסביבה זו מתקיים $z=z(u(x,y),v(x,y))=f(x,y)$. ■

<u>הערה</u>: נניח שניתן לתאר את הסביבה של $P\in M$ כגרף $z=f(x,y)$, $(x,y)\in G$.
אזי נקבל שהסביבה הזאת ניתנת לתיאור גם על-ידי העתקה $r(u,v)=(u,v,f(u,v))$, $(u,v)\in G$
וכאן $rank\ r'(u_0,v_0)=2$ כאשר $r(u_0,v_0)=P$.

<u>משפט 1</u>: יהיו $M \subset \mathbb{R}^n$, $a \in M$. נניח $1 \leq k < n$, ו- $p \in \mathbb{N}$.
התכונות הבאות שקולות:

1. קיימת סביבה $B(a)$ כך ש- $B(a) \cap M = \{(y, f(y)), y \in E\}$
כאשר $E \subset \mathbb{R}^k$ קבוצה פתוחה, $f : E \to \mathbb{R}^{n-k}$ וגם $f \in \mathbf{C}^p(E)$.

2. קיימת סביבה $B(a)$ כך ש- $B(a) \cap M = \{x \in B(a) : \ g(x) = 0\}$
כאשר $g : B(a) \to \mathbb{R}^{n-k}$, $g \in \mathbf{C}^p(B(a))$, $rank\ g'(x) = n - k$ לכל $x \in B(a)$

3. קיימת סביבה $B(a)$ כך ש- $F(\Omega) = B(a) \cap M$ כאשר $\Omega \in \mathbb{R}^k$ קבוצה פתוחה,
$F \in \mathbf{C}^p(\Omega)$ הומיאומורפיזם ו- $rank\ F'(t) = k$ לכל $t \in \Omega$.

<u>הגדרה 7</u>: אם $M \subset \mathbb{R}^n$, $a \in M$ מקיימת אחת מהתכונות מהמשפט הנ"ל אזי נאמר ש-M הוא משטח k-מימדי בסביבת הנקודה a השייך ל- $\mathbf{C}^p$.

<u>הגדרה 8</u>: קבוצה $M \subset \mathbb{R}^n$ נקראת משטח k-מימדי השייך ל- $\mathbf{C}^p$ אם לכל נקודה $a \in M$ הקבוצה M היא משטח k-מימדי בסביבת נקודה זו השייך ל- $\mathbf{C}^p$.

אינפי 4 – הרצאה 6

ליאור פולק

3 באפריל 2016

נעבוד עם משפט 1, כאשר נשתמש בשקילות שבסעיף 3:

קיימת סביבה $B(a)$ כך ש- $B(a)\cap M=F(\Omega)$, כאשר $\Omega\in\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה,

$F\in\mathbf{C^p(\Omega)}$ הומיאומורפיזם ו- $rank(F'(t))=k$ לכל $t\in\Omega$.

<u>הגדרה 1</u>: אם $k=n$ ולכל $a\in M$ הקבוצה M מקיימת את תכונה 3 מהמשפט הנ"ל, אזי M נקראת משטח n–מימדי.

<u>הערה</u>: לנקודה (או איחוד של נקודות) קוראים משטח 0–מימדי.

<u>הגדרה 2</u>: הזוג (F,Ω) נקרא מפה מקומית של $B(a)\cap M$. האוסף של המפות- (F_α,Ω_α), והוא מקיים $M=\bigcap\limits_\alpha F_\alpha(\Omega_\alpha)$, ונקרא **האטלס** של M.

<u>הערה</u>: אם $B(a)\cap M=F(\Omega)$ אז ל-F קוראים **ההצגה הפרמטרית** של $B(a)\cap M$.

<u>דוגמות</u>:

1. כל קבוצה פתוחה $G\in\mathbb{R}^n$ היא משטח n–מימדי ב-$\mathbb{R}^n$. כאן ההצגה היא $F(x)=x$ כך ש- $x\in G$.
2. ספירה ב-$\mathbb{R}^n$: $S_{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n|x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=1\}$ היא משטח $(n-1)$ מימדי.
3. אי אפשר לתאר את המעגל $C=\{x^2+y^2=1\}$ ע"י מפה אחת.
נניח שקיימת פונקציה γ כך ש-$\gamma(I)=C$, כאשר $I\subset\mathbb{R}$ קבוצה פתוחה ו-γ הומיאומורפיזם. אזי $\gamma^{-1}(C)=I$, אבל C קבוצה קומפקטית ולכן $\gamma^{-1}(C)$ היא קבוצה סגורה בסתירה.
ניתן לתאר את C ע"י 4 גרפים:
$y=\sqrt{1-x^2}$ כך ש- $x\in(-1,1)$, $y=-\sqrt{1-x^2}$ כך ש- $x\in(-1,1)$, $x=-\sqrt{1-y^2}$ כך ש- $y\in(-1,1)$, $x=-\sqrt{1-y^2}$ כך ש- $y\in(-1,1)$.
כמו כן, אפשר לתאר את C ע"י ההצגות הפרמטריות הבאות: $\gamma(t)=(\cos(t),\sin(t))$ כך ש- $t\in(0,2\pi)$, $\gamma(t)=(\cos(t),\sin(t))$ כך ש- $t\in(-\pi,\pi)$.

<u>הגדרה 3</u>: יהי $M\in\mathbb{R}^n$ משטח n–מימדי ב-$\mathbf{C}^1$ ויהי $x\in M$.

וקטור $v\in\mathbb{R}^n$ נקרא **וקטור משיק** ל-M בנקודה x אם קיימת עקומה $\gamma:I\to\mathbb{R}^n$ וקיימת $t_0\in I$ כך ש- $\gamma(t)\in m$ לכל $t\in M$, $\gamma(t_0)=x$ ו-$\gamma'(t_0)=v$.

<u>הגדרה 4</u>: האוסף של כל וקטורי המשיק ל-M בנקודה x נקרא **מרחב משיק** ל-M בנקודה x, ומסומן $T_x(M)$.

<u>הערה</u>: נניח ש-M משטח k–מימדי, $a\in M$ וניתן לתאר את הסביבה של a ע"י $\{x|g(x)=0\}$ (כאן $g:B(a)\to\mathbb{R}^{n-k}$, ו-$rank(g'(a))=n-k$).

נגדיר $Ker\,g'(a)=\{h\in\mathbb{R}^n|g'(a)(h)=0\}$, $Im\,F'(t_0)=\{F'(t_0)(t)|t\in\mathbb{R}^k$, כאשר $F(t_0)=a$, ו-F היא הפונקציה מהגדרה 3.

<u>הערה</u>: קל לראות ש-$Im\,F'(t_0)=span\{\frac{\partial F}{\partial t_1}(t_0)\},\ldots,\frac{\partial F}{\partial t_k}(t_0)$ (מאלגברה לינארית).

מתקיים ש-$k=dim(Ker\,g'(a))=dim(Im\,F'(t_0))$.

<u>למה:</u> מתקיים $T_a(M) = Ker\, g'(a) = Im\, F'(t_0)$.

<u>הוכחה:</u> נוכיח ש-$Im\, F'(t_0) \subset T_a(M) \subset Ker\, F'(t_0)$, ומשם מיד נובע מה שרצינו להוכיח כי $dim(Im) = dim(Ker) = k$.

נוכיח $Im\, F'(t_0) \subset T_a(M)$. יהי $t \in \mathbb{R}^k$. נרצה להוכיח ש-$F'(t_0)(t)$ הוא וקטור משיק ל-M ב-a.

ובכן יש $\epsilon > 0$ כך ש- $t_0 + st \in \Omega$ לכל $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ (בגלל ש-Ω פתוחה).

נגדיר עקומה- $\gamma(S) = F(t_0 + st)$, $s \in (-\epsilon, \epsilon)$.

אזי $\gamma(S) \in M$, $\gamma(0) = F(t_0) = a$, ו- $\gamma'(0) = F'(t_0)(t)$, ז"א- $F'(t_0)(t) \in T_a(M)$ ולכן הוכחנו $\boxed{Im\, F'(t_0) \subset T_a(M)}$.

כעת נוכיח $T_a(M) \subset Ker\, g'(a)$. נניח γ עקומה כך ש-$\gamma \in M$, $\gamma(s_0) = a$, $s_0 \in I$, $\gamma'(s_0) = v$.

אזי מתקיים $g(\gamma(s)) = 0$. מכאן נסיק $g'(\gamma(s_0))(\gamma'(s_0)) = 0$, ז"א $g'(a)(v) = 0$, והוכחנו $\boxed{T_a(M) \subset Ker\, g'(a)}$.

<u>הערה:</u> חשוב להבדיל בין מישור משיק לבין מרחב משיק!- במבחן לשים לב מה שואלים.

נתבונן למשל ב-$\mathbb{R}^3$. נניח $M \subset \mathbb{R}^3$ משטח 2-מימדי ו-$p_0 \in M$.

נניח שניתן לתאר את הסביבה של p_0 ע"י $r = r(u, v)$, $(u, v) \in \Omega$ ו-$r(u_0, v_0) = p_0$.

אזי מרחב משיק ל-M $p_0 \in$ הוא $T_{p_0}(M) = span\{r'_u(u_0, v_0), r'_v(u_0, v_0)\}$.

המשוואה של מישור משיק היא: $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ & r'_u(u_0, v_0) & \\ & r'_v(u_0, v_0) & \end{vmatrix} = 0$, כאשר $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

נניח שניתן לתאר את הסביבה של p ע"י $\{F(x, y, z) = 0\}$, כאשר $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

אזי- $T_{p_0}(M) = \{h \in \mathbb{R}^3 | \vec{\nabla} F(x_0, y_0, z_0) \cdot h = 0\}$ מרחב משיק, ולעומת זאת $\vec{\nabla} F(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$ היא משוואת מישור משיק.

<u>מסקנה מהלמה</u>: מימד של מרחק משיק הוא תמיד k.

היפר משטח

הגדרה 5: למשטח $(n-1)$-מימדי ב-$\mathbb{R}^n$ קוראים היפר משטח.

הערה: אם M הוא היפר-משטח אזי $dim\, T_x(M) = n-1$ (כאשר $x \in M$), ונובע- $dim(T_x(M)^{\perp}) = 1$.

הגדרה 6: לוקטור $N(x)$ מ-$T_x(M)^{\perp}$ עם $||N(x)|| = 1$ קוראים נורמל היחידה ל-M ב-x.

הערה: אם N נורמל היחידה אזי גם $-N$.

הערה: בגלל ש-$T_x(M) = \{h | \nabla f(x) \cdot h = 0\}$ מקבלים $N(x) = \pm \frac{\nabla F(x)}{||\nabla F(x)\}||}$.

דוגמה: עבור $n=3$, ניתן לתאר את M ע"י $r = r(u,v)$ ואז $N(x) = \frac{r'_u(u_0,v_0) \times r'_v(u_0,v_0)}{||r'_u(u_0,v_0) \times r'_v(u_0,v_0)||}$, כאשר $r(u_0,v_0) = x$.

הגדרה 7: נניח ש-$M \subset \mathbb{R}^3$ משטח 2-מימדי, הנתון ע"י $r = r(u,v)$, $(u,v) \in \Omega$.

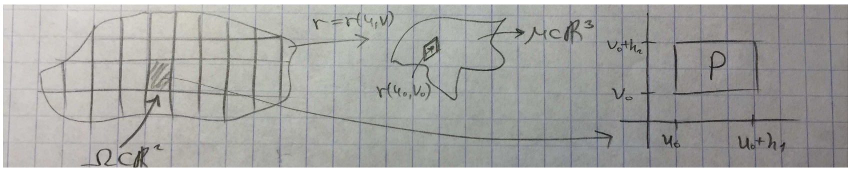
אזי השטח (שטח הפנים) של M מוגדר ע"י $\mu(M) = \iint\limits_{\Omega} ||r'_u \times r'_v|| dudv$.

הערה: כאן מדובר בקבוצה מדידה Ω ($\iint\limits_{\Omega} dxdy$ קיים).

הערה: גם מחשבים שטח לפי אותה נוסחה עבור קבוצות שניתן לתאר ע"י $r = r(u,v)$ כך ש-$(u,v) \in \bar{\Omega}$.

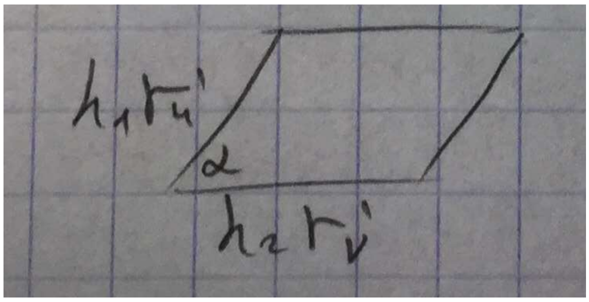
הסבר להגדרה: נתבונן במלבן $[u_0, u_0+h_1] \times [v_0, v_0+h_2]$, ונתאר אותו באופן הבא:

$\{(u_0 + \alpha h_1, v_0 + \beta h_2),\ \alpha \geq 0,\ \beta \leq 1\}$, בגלל ש-$r$ דיפרנציאבילית:



$$r((u + \alpha h_1, v_0 + \beta h_2) = r(u_0,v_0) + \alpha h_1 r'_u(u_0,v_0) + \beta h_2 r'_v(u_0,v_0) + o(\sqrt{(\alpha h_1)^2 + (\beta h_2)^2})$$

הקבוצה $\{\alpha h_1 r'_u(u_0,v_0) + \beta h_2 r'_v(u_0,v_0),\ \alpha \geq 0,\ \beta \leq 1\}$ היא מקבילית הבנויה על הוקטורים $h_1 r'_u(u_0,v_0)$ ו-$h_2 r'_v(u_0,v_0)$



השטח של המקבילית הוא:

$$h_1 ||r'_u|| \cdot h_2 ||r'_v|| \sin(\alpha) = h_1 h_2 ||\{||r'_u(u_0,v_0) \times r'_v(u_0,v_0)\} = m(P) ||r'_u \times r'_v||$$

אם $\Omega = \bigcup\limits_i P_i$ כאשר $P_i \cap P_j = 0$, עבור כל $i \neq j$, אזי- $r(\Omega) = \bigcup\limits_i r(P_i)$.

לכן נקבל $\mu(r(\Omega)) = \sum\limits_i \mu(P_i)$ ואז- $\mu(r(\Omega)) \approx \sum\limits_i ||r'_u \times r'_v(u_i,v_i)|| m(P_i)$.

כעת, אם $\max(diam(P_i)) \to 0$, נקבל $\iint\limits_{\Omega} ||r'_u \times r'_v|| dudv = \lim\limits_{\max(diam(P_i)) \to 0} \sum\limits_i ||r'_u \times r'_v(u_i,v_i)|| m(P_i)$.

דוגמה: חשב את שטח הפנים של $M=\{x^2+y^2+z^2=R^2\}$.

פתרון: ההצגה של M היא

$$r(u,v)=(R\cos(u)\cos(v),R\sin(u)\cos(v),R\sin(v))$$

כאשר $(u,v)\in[0,2\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

מתקיים:

$$r'_u\times r'_v=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -R\sin(u)\cos(v) & R\cos(u)\cos(v) & 0\\ -R\cos(u)\sin(v) & -R\sin(u)\sin(v) & R\cos(v)\end{vmatrix}$$

כלומר $r'_u\times r'_v=R^2(\cos^2(v)\cos(u),\cos^2(v)\sin(u),\cos(u)\sin(v))$.

לכן נקבל $||r'_u\times r'_v||=R^2\sqrt{\cos^2(v)}$, ולכן $\mu(M)=R^2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(v)dvdu=4\pi R^2$.

הערה: יהי M משטח 2–מימדי הנתון ע"י הגרף $z=f(x,y)$, $(x,y)\in\Omega$. נקבל

$$\mu(M)=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

הסבר: במקרה זה ההצגה היא– $r(u,v)=(u,v,f(u,v))$, כך ש–$(u,v)\in\Omega$. כך מתקיים $||r'_u\times r'_v||=\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$

דוגמה: חשב את שטח הפנים של $M=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2=4,\,y\geq\sqrt{3(x^2+z^2)},\,z\geq 0\}$.

פתרון: מספיק למצוא את השטח של $M'=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2=4,\,z\geq\sqrt{3(x^2+y^2)}\}$, ונקבל ש–$\mu(M)=\frac{1}{2}\mu(M')$.

ההצגה היא כמו של ספירה אבל עם $(u,v)\in[0,2\pi]\times[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$.

לכן נקבל ש– $\mu(M)=\frac{1}{2}\cdot 4\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}cos(v)dudv=2\pi(2-\sqrt{3})$.

תודה לליאור רבקין על האיורים המובאים לעיל

אינפי 4 – הרצאה 7

ליאור פולק

10 באפריל 2016

<u>הגדרה 1</u>: יהיו $\{a_1, a_2 \dots a_k\}$ k וקטורים ב-$\mathbb{R}^n$. נניח שהם בת"ל. הקבוצה

$$B(a_1, \dots, a_k) = \left\{ \sum_{j=1}^{k} \theta_j a_k,\, 0 \le \theta_j \le 1 \right\}$$

נקראת מקבילון k-מימדי הנפרש על-ידי הוקטורים $a_1, \dots, a_k$.

אנו רוצים להגדיר את השטח הk-מימדי של $B(a_1, \dots, a_k)$.

לכל קבוצה $B(a_1, \dots, a_k)$ נתאים את המטריצה $A = [a_1, \dots, a_k]$ מגודל $n \times k$ (שמים את הוקטורים בעמודות)

אנו רוצים להגדיר את הפונקציה F שמוגדרת על מטריצות $n \times k$ כך שמתקיים:

1. אם $A = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$ כאשר B מטריצה מגודל $k \times k$ ו-0 מטריצת אפסים מגודל $(n-k) \times k$, אזי- $F(A) = |\det B|$.

<u>הסבר</u>: מתקיים

$$\int\limits_{\varphi(E)} f(x)dx = \int\limits_{E} f(\varphi(t))|J\varphi(t)|dt$$

נניח ש-$f \equiv 1$ ו-φ העתקה לינארית מיוצגת ע"י מטריצה B. נניח ש-$E = [0,1]^k$. אזי נקבל ש-$m(\varphi(E)) = |\det B|$.
במקרה שלנו φ היא העתקה לינארית עם מטריצה B.

2. השטח לא תלוי בהזזות וסיבובים, ז"א $F(T(A)) = F(A)$ לכל מטריצה אורתוגונלית T מגודל $n \times n$.

<u>הגדרה 2</u>: שטח k-מימדי של $B(a_1, \dots, a_k)$ מוגדר על-ידי

$$\mu(A) = \sqrt{\det(A^t A)}$$

כאשר A^t היא המטריצה המשוחלפת של A.

<u>משפט 1</u>: הפונקציה $\mu(A)$ היא הפונקציה היחידה על קבוצת המטריצות $n \times k$ שמקיימת:

1. $\mu(T(A)) = \mu(A)$ לכל מטריצה אורתוגונלית T מגודל $n \times n$.
2. אם $A = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$ כאשר B מטריצה מגודל $k \times k$ ו-0 מטריצת אפסים מגודל $(n-k) \times k$, אזי- $\mu(A) = |\det B|$.

<u>הוכחה</u>:

1. נניח ש-T אורתוגונלית. אזי $T^tT = I$. לכן

$$\mu(TA) = \sqrt{\det((TA)^tTA)} = \sqrt{\det(A^tT^tTA)} = \sqrt{\det(A^tA)} = \mu(A)$$

2. אם $A = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$ אזי $A^tA = B^tB$ ולכן

$$\mu(A) = \sqrt{\det(B^tB)} = \sqrt{(\det B^t)(\det B)} = \sqrt{(\det(B))^2} = |\det B|$$

נוכיח יחידות. נניח ש-F גם מקיימת את 1 ו-2. נניח $A = [a_1, \ldots, a_k]$ כאשר הוקטורים $a_1, \ldots, a_k$ בת"ל.

קיימת מטריצה אורתוגונלית T כזאת ש- $TA = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$ כאשר B מטריצה מגודל $k \times k$.

נניח $v_1, \ldots, v_k$ בסיס אורותונורמלי של $span\{a_1, \ldots, a_k\}$. נשלים אותו לבסיס $v_1, \ldots, v_n$ של $\mathbb{R}^n$. נגדיר $T(v_i) = e_i$, $i = 1, \ldots, n$, כאשר e_i הבסיס הרגיל של $\mathbb{R}^n$.

אזי T מטריצה אורתוגונלית ו- $TA = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$.

מתקיים:

$$F^2(A) = F^2(TA) = |\det B|^2 = \det(B^tB) = \det(A^tA)$$

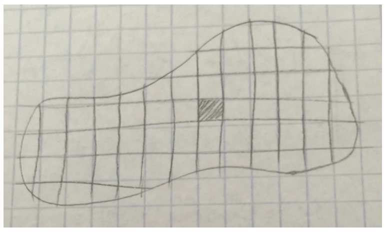
ולכן $F(A) = \sqrt{\det(A^tA)} = \mu(A)$.

■

הגדרה 3: יהי $M \subset \mathbb{R}^n$ משטח k-מימדי הנתון על-ידי $M = F(\Omega)$. שטח k-מימדי של M מוגדר על-ידי

$$\mu(M) = \int\limits_{\Omega} \sqrt{\det(F'(\tau)^t F'(\tau)} d\tau$$

הסבר:



נקרב את Ω על ידי איחוד סופי של קוביות. נניח ש:

$$Q = \left\{t \in \mathbb{R}^k :\ t_j^0 \le t_j \le t_j^0 + h,\ j = 1, \ldots, k\right\}$$

כל נקודה מ-Q היא מהצורה $t^0 + h\theta$, כאשר $\theta = (\theta_1, \ldots \theta_k)$ ו-$0 \le \theta_j \le 1$.

אזי מתקיים

$$F\left(t^0 + \theta h\right) = F\left(t^0\right) + F'\left(t^0\right)(h\theta) + \mathrm{o}(||h\theta||)$$

הקבוצה $\left\{F'\left(t^0\right)(h\theta),\, 0 \le \theta_j \le 1\right\}$ היא מקבילון $B(hF'\left(t^0\right)e_1, \ldots, hF'\left(t^0\right)e_k)$

והשטח שלו שווה ל-$h \sqrt[k]{\det(F'(t_0)^t F'(t_0)}$.

לכן

$$\mu(M) = \lim_{\max(diam Q_i)\to 0} \sum_i \mu(Q_i) = \lim_{\max(diam Q_i)\to 0} \sum_i \sqrt{\det(F'(\tau_i)^t F'(\tau_i)} m(Q_i) = \int\limits_{\Omega} \sqrt{\det(F'(\tau)^t F'(\tau)} d\tau$$

אם $M \subset \mathbb{R}^3$ משטח דו-מימדי הנתון על-ידי $z = f(x,y),\ (x,y) \in \Omega$ אזי

$$\mu(M) = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\, dxdy$$

נניח ש-M היפר-משטח ב-$\mathbb{R}^n$ הנתון על-ידי $x_n = f(x_1, \ldots x_{n-1})$, כאשר $(x_1, \ldots x_{n-1}) \in \Omega$. נמצא את השטח ה-$(n-1)$-מימדי של M.

ההצגה הפרמטרית של M היא $F(t) = (t_1, \ldots, t_{n-1}, f(t_1, \ldots, t_{n-1}))$ כאשר $(t_1, \ldots, t_{n-1}) \in \Omega$.

מתקיים:

$$F'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial t_1} & \frac{\partial f}{\partial t_2} & \ldots & \ldots & \frac{\partial f}{\partial t_{n-1}} \end{pmatrix}$$

ומכאן:

$$F'(t)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & \frac{\partial f}{\partial t_1} \\ \vdots & 1 & \vdots & \ldots & \frac{\partial f}{\partial t_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \frac{\partial f}{\partial t_{n-1}} \end{pmatrix}$$

נסמן $a_i = \frac{\partial f}{\partial t_i}$. אזי מתקיים:

$$F'(t)^T F'(t) = \begin{pmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & \dots & a_1a_{n-1} \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & a_2a_3 & \dots & a_2a_{n-1} \\ a_3a_1 & a_3a_2 & \ddots & \dots & a_3a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1}a_1 & a_{n-1}a_2 & \dots & 1 & 1+a_{n-1}^2 \end{pmatrix}$$

<u>למה</u>: מתקיים $\det(\delta_{ij} + c_ic_j) = 1 + \sum_j c_j^2$

<u>הוכחה</u>: נסמן $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$. אזי העמודה ה-$j$-ית של $(\delta_{ij} + c_ic_j)$ היא מהצורה $e_j + c_jc$.

הדטר' $\det[e_1 + c_1c, e_2 + c_2c, \dots, e_n + c_nc]$ שווה ל-

$$\det I + \sum_{j=1}^{n} \det[e_1, \dots, c_jc, \dots, e_n] = 1 + \sum_{j=1}^{n} c_j \det[e_1, \dots, e_{j-1}, c, e_{j+1}, \dots, e_n] = 1 + \sum_{j=1}^{n} c_j$$

מקבלים ש-

$$\det F'(t)^T F'(t) = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^2$$

<u>למה</u>: אם M היפר-משטח ב-$\mathbb{R}^n$ הנתון על-ידי

$$(x_1, \dots x_{n-1}) \in \Omega, \quad x_n = f(x_1, \dots x_{n-1})$$

אזי

$$\mu(M) = \int_\Omega \sqrt{1 + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^2} dx_1 \dots dx_{n-1}$$

דוגמה: נחשב את השטח ה$(n-1)$ מימדי של הספירה $S_{n-1}=\left\{x_1^2+\ldots+x_n^2=1\right\}$.

נסמן את השטח הזה ב-ω_{n-1}.

נסמן את השטח ה-n מימדי של הכדור $\left\{x_1^2+\ldots+x_n^2\leq 1\right\}$ ב-V_n.

נתאר את הספירה על-ידי $f(x_1,\ldots,x_{n-1})\equiv\sqrt{1-\left(x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2\right)}=x_n$, $\quad x_1^2+\ldots+x_n^2\leq 1$.

מתקיים:

$$1+\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^2=\frac{1}{1-\left(x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2\right)}$$

ולכן:

$$\omega_{n-1}=2\underset{x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2\leq 1}{\int\ldots\int}\sqrt{\frac{1}{1-\left(x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2\right)}}\,dx_1\ldots dx_{n-1}=$$

$$=2\underset{x_1^2+\ldots+x_{n-2}^2\leq 1}{\int\ldots\int}dx_1\ldots dx_{n-2}\int\limits_{-\sqrt{1-\left(x_1^2+\ldots+x_{n-2}^2\right)}}^{\sqrt{1-\left(x_1^2+\ldots+x_{n-2}^2\right)}}\sqrt{\frac{1}{1-\left(x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2\right)}}\,dx_{n-1}$$

אם נסמן $t=1-\left(x_1^2+\ldots+x_{n-2}^2\right)$ נקבל

$$\int\limits_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}}\frac{dx_{n-1}}{\sqrt{t-x_{n-1}^2}}\underset{\left(y=\frac{x_{n-1}}{\sqrt{t}}\right)}{=}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=2\arcsin(1)=\pi$$

נשתמש בנוסחה $V_n=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+!)}$, כאשר Γ היא פונקציית גאמא המוגדרת על-ידי

$$\Gamma(\alpha)=\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

נקבל מכאן-

$$\omega_{n-1}=2\pi\frac{\pi^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma(\frac{n}{2})}=2\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\underset{\left(\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\right)}{=}2\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{2}{n}\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

דוגמה: נחשב את השטח ה-$(n-1)$ מימדי של הסימפלקס $\sum=\left\{x\in\mathbb{R}^n:\ \sum\limits_{i=1}^n x_i=1, x_i\geq 0\right\}$. אם $n=3$ השטח שווה ל-$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

אינפי 4 – הרצאה 8

ליאור פולק

1 במאי 2016

לא חשבתם שנשאיר אתכם במתח אה?

<u>דוגמה</u>: נחשב את השטח ה־$(n-1)$ מימדי של הסימפלקס $\sum=\left\{x\in\mathbb{R}^n:\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i=1,x_i\geq0\right\}$. זו בעצם פירמידה (נסו לדמיין). אם $n=3$ השטח שווה ל־$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

<u>פתרון</u>: ההצגה הפרמטרית של Σ היא $f(x_1,x_2\ldots x_{n-1})=x_n=1-(x_1+\ldots+x_{n-1})$, כאשר $0\leq x_1+\ldots+x_{n-1}\leq1$.

מתקיים אפוא $\sqrt{1+\sum\limits_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)}=\sqrt{n}$.

לכן נרשום

$$S_n=\sqrt{n}\int\ldots\int dx_1\ldots dx_{n-1},\ 0\leq x_1+\ldots+x_{n-1}\leq1$$

אם נסמן α_n את הנפח של סימפלקס ב־$\mathbb{R}^n$, נקבל $S_n=\sqrt{n}\alpha_{n-1}$.

נמצא את α_n. מתקיים:

$$\alpha_n=\int\limits_{0\leq x_1+\ldots+x_n\leq1}\ldots\int dx_1\ldots dx_n\underbrace{=_{Fubini}}\int\limits_0^1dx_n\int\limits_{0\leq x_1+\ldots+x_{n-1}\leq1-x_n}\ldots\int dx_1\ldots dx_{n-1}=$$

$$\underbrace{=_{Changing\,Variables}}=\alpha_{n-1}\int\limits_0^1(1-x_n)^{n-1}dx_n=\frac{\alpha_{n-1}}{n}$$

לכן נקבל $\alpha_n=\frac{1}{n!}$, ומכאן $S_n=\frac{\sqrt{n}}{(n-1)!}$.

הגדרה 1: יהי $M \subset \mathbb{R}^n$ משטח k-מימדי הנתון ע"י $M = F(\Omega)$. תהי $f : M \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. אזי האינטגרל של f ביחס לשטח הפנים של M מוגדר ע"י $\int\limits_M f\,ds = \int\limits_\Omega f(F(t))\sqrt{\det F'(t)^T F'(t)}dt$. אינטגרל כזה נקרא **אינטגרל משטחי מסוג ראשון**.

הערה: מבחינה פיזיקלית, אם f מתארת את צפיפות המסה של M אזי $\int\limits_M f\,ds$ שווה למסה של M.

דוגמה: מצא את המסה של החרוט $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $1 \le z \le 4$ עם צפיפות מסה $f(x,y,z) = 10 - z$.

פתרון: מתקיים

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ , \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ולכן

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} = \sqrt{2}$$

ומכאן

$$m = \int\limits_M (10-z)ds = \sqrt{2}\iint\limits_{1\le\sqrt{x^2+y^2}\le 4}\left(10-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy = \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_1^4(10-r)rdrd\varphi = 108\sqrt{2}\pi$$

הגדרה 2: יהי $M \subset \mathbb{R}^n$ היפר-משטח. נאמר ש-M הוא משטח **בעל אוריינטציה** אם קיים נורמל היחידה $N(x)$ כך שהוא פונקציה רציפה על M.

הגדרה 3: אם M בעל אוריינטציה, אומרים שהנורמל N מגדיר אוריינטציה על M.

הערה: דוגמה של משטח שהוא לא בעל אוריינטציה הוא משטח מוביוס (בונים לולאת מוביוס ובוחרים נקודה עליה. כשרצים על הלולאה מהנקודה משני הצדדים, אנו נקבל שמצד אחד הנורמל בכיוון אחד ומצד שני הנורמל בכיוון הפוך- הנורמל לא רציף!). אפשר להוכיח באופן אנליטי, אבל לא אצלנו.

משפט 1: אם M משפט קשיר בעל אוריינטציה, אזי יש לו בדיוק שתי אוריינטציות.

הוכחה: נניח שיש עוד אוריינטציה, ν שלא מתלכדת עם N ו-$-N$. אזי יש נקודות שונות x_1 ו-x_2 כך ש $\nu(x_1) = N(x_1)$, $\nu(x_2) = -N(x_2)$ (זה אפשרי כי לנורמל שני כיוונים־ למעלה או למטה, והרי אמרנו שν לא מזדהה עם אחת מהן בהחלט).

נתבונן בפונקציה $f(x) = N(x) \cdot \nu(x)$. $f : M \to \mathbb{R}$ ורציפה. מתקיים $f(x_1) = 1$, $f(x_2) = -1$ (שימו לב ש$N(x)$ היא פונקציה וקטורית). M קבוצה קשירה ולכן f מקבלת את כל הערכים ביניהם. אבל $|f(x)| \equiv 1$ לכל $x \in M$ (שכן אנו מדברים על נורמל היחידה). סתירה.

הגדרה 4: יהי $M \subset \mathbb{R}^n$ היפר-משטח בעל אוריינטציה עם נורמל יחידה N. נניח ש-$F : M \to \mathbb{R}^n$ שדה וקטורי רציף. אזי האינטגרל

$$\int\limits_M (F \cdot N)\,ds = \int\limits_\Omega F(r(t)) \cdot N(r(t))\sqrt{\det r'(t)^T r'(t)}dt$$

כאשר $M = r(\Omega)$. זה נקרא **אינטגרל משטחי מסוג שני**.

עוד שם לאינטגרל זה (שלום חשמל ומגנטיות) **שטף** של F דרך M לכיוון N ומסומן $\text{flux}_F(M)$.

נניח $n=3$ ו־$r(u,v):\Omega\to M$.

מתקיים

$$N(r(u,v))=\pm\frac{r'_u(u,v)\times r'_v(u,v)}{|r'_u\times r'_v|},\ \sqrt{\det r'(u,v)r'(u,v)}=||r'_u\times r'_v||$$

לכן

$$\int\limits_M (F\cdot N)\,ds=\pm\iint\limits_\Omega F(r(u,v))\cdot(r'_u(u,v)\times r'_v(u,v))dudv$$

מהי המשמעות הפיזיקלית של האינטגרל מסוג שני?

נניח שבתחום מסוים ב־$\mathbb{R}^3$ יש זרימה של נוזל. נניח ש־M הוא משטח 2־מימדי שנמצא בתחום הזה ונניח ש־ $F:M\to\mathbb{R}^3$ מתארת מהירות של תנועה.

<u>שאלה</u>: מהי כמות הנוזל העובר דרך M לכיוון N תוך יחידת זמן אחת? (ההנחה־ הזרימה סטציונרית־ יעני קבועה בזמן).

נתבונן בחלק מאוד קטן של משטח. נסמן אותו ע"י σ.

<u>**(תמונה כאן).**</u>

ביחידת זמן אחת הנוזל ימלא את הגליל המוטה עם בסיס σ אשר הקו היוצר שלו שווה ל־$|\vec{F}|$.

אם נניח שצפיפות הנוזל שווה ל־1 אזי כמות הנוזל העוברת דרך σ שווה לנפח הגליל, ז"א שווה ל־$h\cdot\mu(\sigma)$, כאשר h הוא גובה הגליל.

מתקיים $h=\vec{F}\cdot\vec{N}$, ולכן כמות הנוזל שווה ל־$\left(\vec{F}\cdot\vec{N}\right)\cdot\mu(\sigma)$.

אם נחלק את M לחלקים מאוד קטנים ונעבור לגבול אזי נקבל שכמות הנוזל שווה ל־$\int\limits_M (F\cdot N)\,ds$.

אם $\int\limits_M (F\cdot N)\,ds<0$ אזי מקבלים שכמות הנוזל שיוצאת מ־M יותר קטנה מהכמות שנכנסת ל־M.

נניח $n=3$ ו־$M=r(\Omega)$. נניח ש־ $r(u,v)=(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))$.

מתקיים

$$\int\limits_M (F\cdot N)ds=\iint\limits_\Omega F(r(u,v))\cdot(r'_u\times r'_v)dudv$$

נסמן:

$$\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix},\quad \frac{\partial(\psi,\chi)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\\ \frac{\partial\chi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial v}\end{vmatrix},\quad \frac{\partial(\chi,\varphi)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\chi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial v}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\end{vmatrix},\quad r'_u\times r'_v=\left(\frac{\partial(\psi,\chi)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(\chi,\varphi)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\right)$$

אם נסמן $F=(P,Q,R)$ אזי נקבל ש־

$$\int\limits_M (F\cdot N)ds=\iint\limits_\Omega\left[P(r(u,v))\frac{\partial(\Psi,\chi)}{\partial(u,v)}+Q(r(u,v))\frac{\partial(\chi,\varphi)}{\partial(u,v)}+R(r(u,v))\frac{\partial(\varphi,\Psi)}{\partial(u,v)}\right]dudv$$

נסמן

$$\begin{aligned}\iint\limits_M Pdy\wedge dz&=\iint\limits_\Omega P(r(u,v))\tfrac{\partial(\Psi,\chi)}{\partial(u,v)}dudv\\ \iint\limits_M Qdz\wedge dx&=\iint\limits_\Omega Q(r(u,v))\tfrac{\partial(\chi,\varphi)}{\partial(u,v)}dudv\\ \iint\limits_M Rdx\wedge dy&=\iint\limits_\Omega R(r(u,v))\tfrac{\partial(\varphi,\Psi)}{\partial(u,v)}dudv\end{aligned}$$

אזי מקבלים ש־

$$\int\limits_M (F\cdot N)ds=\iint\limits_M (Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy)$$

נניח $G \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה ונניח ש $\partial G \subset \mathbb{R}^n$ היפר–משטח. אזי אפשר להגדיר נורמל N פנימי ("למטה") או חיצוני ("למעלה") ביחס ל–G.

נניח ש–$G = \{x \in \mathbb{R}^n : \ g(x) < 0\}$ ו–$\partial G = \{x \in \mathbb{R}^n : \ g(x) = 0\}$. יהי $x \in \partial G$ ונניח $v \notin T_x(\partial G)$. זה אומר ש–

$$\nabla g(x) \cdot v \neq 0$$

נראה שאם $\nabla g(x) \cdot v > 0$ אזי הוקטור החיצוני ביחס ל–G.

נגדיר $\varphi(t) = g(x + tv)$ (שימו לב שזוהי פונקציה של משתנה אחד). אזי לפי כלל השרשרת $\varphi'(0) = \nabla g(x) \cdot v > 0$.

ז"א קיים $\delta_0 > 0$ כך שלכל $t \in (0, \delta_0)$, מתקיים $g(x + tv) > 0$.

מכאן $x + tv \notin G$. מכאן נובע שוקטור שמחבר את x ו$x + tv$ הוא חיצוני ביחס ל–G ולכן גם v חיצוני.

לכן נקבל ש–$N = \frac{\nabla g(x)}{|\nabla g(x)|}$ הוא נורמל חיצוני.

מכאן נובע שאם

$$\begin{gathered} G = \{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x_1, \dots x_{n-1}) < x_n\} \\ \partial G = \{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x_1, \dots x_{n-1}) = x_n\} \end{gathered}$$

אזי ל–N הרכיב החיצוני ה–n שלילי.

<u>דוגמה</u>: חשב שטף של $F = (x, y, z)$ דרך $\left\{x^2 + y^2 + z^2 = a^2\right\}$ עם נורמל חיצוני.

<u>הערה</u>: אם M נתון כגרף $z = f(x, y)$ אזי

$$\int\limits_M (F \cdot N) ds = \iint\limits_\Omega F(x, y, f(x, y)) \cdot (-f'_x, -f'_y, +1) dx dy$$

תודה רבה לאנטון פלבקו על החלק האחרון של ההרצאה

.

אינפי 4 – הרצאה 9

ליאור פולק

8 במאי 2016

<u>הודעה מנהלתית</u>: ב15.05 לא יתקיים שיעור, וב23.06 יהיה שיעור השלמה, 2–4.

<u>דוגמה</u>: $M=\left\{x^2+y^2+z^2=a^2\right\}, \quad F(x,y,z)$. צ"ל $\int\limits_M (F\cdot N)ds$ כאשר N הוא הנורמל החיצוני.

<u>פתרון</u>: נסמן ב-M^+, M^- את החלקים של הספירה: העליון + והתחתון –. אזי:

$$\int\limits_M (F\cdot N)ds=\int\limits_{M^+}(F\cdot N)ds+\int\limits_{M^-}(F\cdot N)ds=$$

$$=\underbrace{\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\left(\left(x,y,\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}\right)\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}},\frac{y}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}},1\right)\right)dxdy+}_{M^+}$$

$$+\underbrace{\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\left(\left(x,y,-\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}\right)\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}},\frac{y}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}},-1\right)\right)dxdy=}_{M^-}$$

$$=2a^2\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\frac{1}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}dxdy=\underbrace{\dots}_{\text{Calculus 3}}=4\pi a^3$$

<u>דרך אחרת</u>: נשתמש בהצגה הפולארית

$$r(u,v)=(a\cos u\cos v,a\sin u\cos v,a\sin v),\quad u\in[0,2\pi],\ v\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

מתקיים:

$$r'_u\times r'_v=a^2(\cos^2 v\cos u,\cos^2 v\sin u,\cos v\sin v=\frac{1}{2}\sin 2v)$$

ונשים לב שהנורמל פונה החוצה תמיד.

לכן:

$$\int\limits_M(F\cdot N)ds=a^3\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 u\cos^3 v+\sin^2 u\cos^3 v+\cos v\sin^2 v)dvdu\underbrace{=}_{\cos^2 x+\sin^2 x=1}a^3\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos vdvdu=4\pi a^3$$

<u>הגדרה 1</u>: יהי $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ שדה וקטורי. **הדיברגנץ** של F מוגדר ע"י

$$div\, F(x)=\lim_{Q\to X}\frac{1}{m(Q)}\int_{\partial Q}(F\cdot N)ds$$

Q היא קובייה ב־$\mathbb{R}^n$, ו־x היא נקודה בקובייה זו. נשאיף את גודל הקובייה ל־x (נקטין עוד ועוד), וזהו הגבול.

בהגדרה, $m(Q)$ היא המידה (הנפח) של Q, ו־N הוא הנורמל החיצוני.

<u>הערה</u>: מבחינה פיזיקלית, הדיברגנץ מייצג את צפיפות השטף.

<u>למה</u>: נניח $F\in\mathbf{C}^1$. אזי מתקיים:

$$div\, F(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F_j}{\partial x_j}(x)$$

<u>הערה</u>: לעיתים מגדירים כך את הדיברגנץ.

<u>הוכחה</u>: בה"כ, x הוא קדקד הקובייה. נקבע $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)$. נניח ש־$Q=\prod_{i=1}^{n}[a_i,a_i+\epsilon]$.

נסמן $\hat{x}_i=(x_1,x_2,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)$, $\hat{Q}_i=\prod_{k\neq i}[a_k,a_k+\epsilon]$.

נקבל ש־∂Q היא האיחוד של $2n$ פאות מהצורה $E_i^+=\left\{x\,:\,x_i=a_i+\epsilon,\ \hat{x}_i\in\hat{Q}_i\right\}$, $E_i^-=\left\{x\,:\,x_i=a_i,\ \hat{x}_i\in\hat{Q}_i\right\}$.

מתקיים ש־$N=i$ על E_i^+, ו־$N=-i$ על E_i^- (i– וקטור היחידה בכיוון ציר i).

לכן:

$$div\, F(x)=\lim_{Q\to X}\frac{1}{m(Q)}\int_{\partial Q}(F\cdot N)ds=\frac{1}{\epsilon^{n-1}}\sum_{i=1}^{n}\int_{\hat{Q}_i}\left(F_i\left(a_i+\epsilon,\hat{x}_i\right)-F_i\left(a_i,\hat{x}_i\right)\right)d\hat{x}_i$$

בנוסף

$$\frac{\left(F_i\left(a_i+\epsilon,\hat{x}_i\right)-F_i\left(a_i,\hat{x}_i\right)\right)}{\epsilon}=\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\left(a_i+\epsilon\theta_i,\hat{x}_i\right)$$

מרציפות במ"ש נובע שלכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $\hat{x}_i\in\hat{Q}_i$ $m(Q)<\delta,$ מתקיים ש־

$$\left|\frac{F_i\left(a_i+\epsilon,\hat{x}_i\right)-F_i\left(a_i,\hat{x}_i\right)}{\epsilon}-\frac{\partial F_i}{\partial x_i}(a)\right|\le\frac{\epsilon}{n}$$

מכאן:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon^n}\sum_{i=1}^{n}\int_{\hat{Q}_i}\left(F_i\left(a_i+\epsilon,\hat{x}_i\right)-F_i\left(a_i,\hat{x}_i\right)\right)d\hat{x}_i=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F_j}{\partial x_j}(x)$$

■

__הגדרה 2__: תהי $G \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה, קשירה וחסומה. נאמר ש-G **בעלת שפה חלקה** אם לכל $x \in \partial G$ קיים כדור פתוח B_x שמרכזו ב-x, קיימת פונקצייה $g \in \mathbf{C}^1$, וקיים $1 \leq j \leq n$ כך ש-

$$\partial G \cap B_x \left\{\xi \in B_x : \xi_j = g(\hat{\xi}_j)\right\}$$

ו-$G \cap B_x$ היא אחת מהקבוצות $\left\{\xi \in B_x : \xi > g(\hat{\xi}_j)\right\}$ או $\left\{\xi \in B_x : \xi < g(\hat{\xi}_j)\right\}$. כך g היא בעצם הצגה פרמטרית של השפה.

__למה__: תהי $K \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה קומפקטית ונניח $K \subset \bigcup\limits_{x \in K} B_x$. אזי קיים מספר סופי של כדורים $B_{x_1} \ldots B_{X_m}$ ופונקציות $\varphi_j \in \mathbf{C}^1$ כך שמתקיים:

1. $\varphi_j \geq 0$
2. $\sum\limits_{j=1}^{m} \varphi_j(x) \equiv 1$ לכל $x \in K$
3. $\varphi_j(x) = 0$ לכל $x \notin \frac{1}{2}B_{x_j}$

__הוכחה__: נגדיר

$$\Psi_x(y) = \begin{cases} \left(\rho_x^2 - 4\left\|x-y\right\|^2\right)^2 & \left\|x-y\right\| \leq \frac{1}{2}\rho_x \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

כאשר ρ_x הוא הרדיוס של B_x.

נבחר תת־כיסוי סופי של הכיסוי $K \subset \bigcup\limits_{x \in K} \frac{1}{4}B_x$. נסמן אותו על-ידי $\left\{\frac{1}{4}B_{x_j}\right\}_{j=1,\ldots,m}$.

את הפונקציה Ψ_x שמתאימה ל-B_{x_j} נסמן על-ידי $\Psi_j(y)$.

נקבל ש-$\Psi_j > 0$ על $\frac{1}{4}B_{x_j}$, ו-$\Psi_j = 0$ לכל $y \notin \frac{1}{2}B_{x_j}$.

נגדיר כעת

$$\varphi_j(y) = \begin{cases} \frac{\Psi_{x_j}(y)}{\sum\limits_{i=1}^{m} \Psi_{x_i}(y)} & \Psi_{x_j} > 0 \\ 0 & \Psi_{x_j} = 0 \end{cases}$$

מהגדרה זו ניתן לראות שמתקיימים תנאים 1,2,3.

■

__הגדרה 3__: משפחת הפונקציות $\{\varphi_j\}$ נקראת **חלוקת היחידה** על K המתאימה לכיסוי $\{B_x\}$.

נניח ש-$G \subset \mathbb{R}^n$ בעלת שפה חלקה. נבחר כיסוי של $\bar{G}$ באופן הבא: אם $x \in \partial G$ אזי בוחרים את B_x מההגדרה של ∂G. אם $x \in G$ אזי בוחרים את B_x כך ש-$B_x \subset G$.
נבחר חלוקת היחידה על $\bar{G}$ המתאימה לכיסוי $\{B_x\}$.

<u>הגדרה 4</u>: אם f רציפה וממשית על ∂G, נגדיר:

$$\int\limits_{\partial G} f ds = \sum_j \int\limits_{\partial G} (f\varphi_j) ds$$

<u>הערה</u>: ההגדרה לא תלויה בבחירת חלוקת היחידה. נניח $\{\varphi'_k\}$ עוד חלוקת היחידה. אזי:

$$\int\limits_{\partial G} (f\varphi_j) ds = \sum_k \int\limits_{\partial G} (f\varphi_j)\varphi'_k ds$$

ומכאן

$$\sum_j \int\limits_{\partial G} (f\varphi_j) ds = \sum_j \sum_k \int\limits_{\partial G} f\varphi_j\varphi'_k ds = \sum_k \sum_j = \sum_k \int\limits_{\partial G} f\varphi'_k ds$$

<u>משפט 1</u>: (משפט הדיברגנץ)

תהי $G \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה, קשירה וחסומה עם שפה חלקה. נניח $F \in \mathbf{C}^1(\bar{G})$ שדה וקטורי. אזי:

$$\int\limits_{\partial G} (F \cdot N) ds = \int\limits_{G} (div\, F) dx$$

כאשר N הנורמל החיצוני על ∂G.

נראה שאם $n = 2$ אנו מקבלים את משפט גרין.

משפט גרין אומר:

$$\int\limits_{\gamma^+} P dx + Q dy = \iint\limits_{G} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

ננסח מחדש את המשפט:

$$\int\limits_{\gamma^+} F_1 dy - F_2 dx = \iint\limits_{G} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dx dy$$

נניח שההצגה של γ^+ היא:

$$t \in [a,b],\ \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

אזי:

$$\int\limits_{\gamma^+} F_1 dy - F_2 dx = \int\limits_a^b \left(F(\gamma(t)) \cdot \frac{(\gamma'_2(t), -\gamma'_1(t))}{\|\gamma'(t)\|} \right) \|\gamma'(t)\| \, dt$$

כאשר $F = (F_1, F_2)$.

נסמן: $N = \frac{(\gamma'_2(t), -\gamma'_1(t))}{\|\gamma'(t)\|}$. אזי $N \cdot \gamma'(t) = 0$, ולכן N נורמל היחידה. כמו כן, $ds = \|\gamma'(t)\| \, dt$.

לכן,

$$\int_{\gamma^+} F_1 dy - F_2 dx = \int_{\gamma^+} (F \cdot N) ds$$

נותר להראות ש-N נורמל חיצוני. האוריינטציה נגד כיוון השעון מבטיחה שהוקטור $\gamma'(t)$ פונה "שמאלה".

<u>טענה</u>: הוקטור $(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))$. מתקבל כסיבוב של $\gamma'(t)$ ב-$\frac{\pi}{2}$ בכיוון השעון.

<u>הסבר</u>: אם $z = x + iy$ אזי $e^{-\frac{\pi}{2}i} z = -i(x+iy) = y - ix$.

<u>הוכחת משפט הדיברגנץ</u>: נסמן $N = (N_1, \ldots, N_n)$. מ"ל

$$\int_{\partial G} (F \cdot N_j) ds = \int_G \frac{\partial f}{\partial x_j} dx$$

לכל $j = 1, \ldots, n$.

אינפי 4 – הרצאה 10

ליאור פולק

22 במאי 2016

<u>תזכורת</u>: <u>משפט 1</u>: (משפט הדיברגנץ)

תהי $G\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה, קשירה וחסומה עם שפה חלקה. נניח $F\in\mathbf{C}^1(\bar{G})$ שדה וקטורי. אזי:

$$\int\limits_{\partial G}(F\cdot N)ds=\int\limits_{G}(div\,F)dx$$

כאשר N הנורמל החיצוני על ∂G.

<u>הוכחת משפט הדיברגנץ</u>: נסמן $N=(N_1,\ldots,N_n)$. מ"ל

$$(\star)\quad\int\limits_{\partial G}(F\cdot N_{\mathrm{i}})ds=\int\limits_{G}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx$$

לכל $i=1,\ldots,n$, כאשר f ממשית. גם מ"ל

$$\int\limits_{\partial G}(f\varphi_j)N_i ds=\int\limits_{G}\frac{\partial(f\varphi_j)}{\partial x_i}dx$$

כאשר φ_j היא אחת הפונקציות מחלוקת היחידה. לכן בה"כ מ"ל את $(\star)$, כאשר $f\equiv 0$ לכל $x\notin\frac{1}{2}B$ ו-B הוא אחד מהכדורים בהגדרה.

<u>מקרה 1</u>: $B\subset G$. במקרה זה, $f\equiv 0$ על השפה ∂G ולכן $\int\limits_{\partial G}(fN_i)ds=0$.

מצד שני, $\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i d\hat{x}_i=\int\limits_{G}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx$ ולפי ניוטון-לייבניץ $\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i=0$, ולכן $\int\limits_{G}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx=0$ והוכחנו את $(\star)$ במקרה זה.

<u>מקרה 2</u>: $B \cap \partial G \neq \phi$. בה"כ נניח $G \cap B = \{x \in B | x_n > g(x_1, \dots, x_{n-1})\}$. g היא פונקציה דיפרנציאבילית כך שהשפה של G מתוארת ע"י $x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1})$. נסמן $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$.
מכיוון ש-N הוא נורמל חיצוני, מתקיים

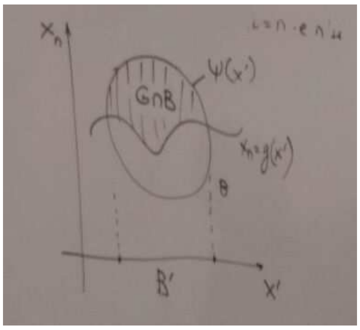
$$N = \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_{n-1}}, -1\right)}{\sqrt{||\nabla g||^2 + 1}}$$

וגם $ds = \sqrt{||\nabla g||^2 + 1} dx'$.

לכן

$$N_i ds = \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x_i} dx' & i \neq n \\ -dx' & i = n \end{cases}$$

נניח $i = n$.



מתקיים:

$$G \cap B = \{(x', x_n) | x' \in B', g(x') < x_n < \Psi(x')\}$$

וגם:

$$\partial G \cap B = \{x_n = g(x'), x' \in B'\}$$

לכן מתקיים:

$$\int\limits_G \frac{\partial f}{\partial x_n} dx \underbrace{=}_{\text{Fubini}} \int\limits_{B'} \int\limits_{g(x')}^{\Psi(x')} \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n dx' \underbrace{=}_{\text{Newton–Leibniz}} -\int\limits_{B'} f(x', g(x')) dx' \underbrace{=}_{\text{By Definition}} \int\limits_{\partial G} f N_n ds$$

כעת **נניח** $i \neq n$. מתקיים:

$$\int\limits_G \frac{\partial f}{\partial x_i} dx \underbrace{=}_{\text{Fubini}} \int\limits_{B'} \int\limits_{g(x')}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x', x^n) dx_n dx' \underbrace{=}_{\text{Switching Variables}} \int\limits_{B'} \int\limits_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x', t + g(x')) dt dx' \underbrace{=}_{\text{Chain Rule + Fubini}}$$

$$= \int\limits_{B' x (0,\infty)} \left[\frac{\partial}{\partial x_i}(f(x', t + g(x'))) - \frac{\partial g}{\partial x_i}(x') \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n}(x', t + g(x'))\right] dx =$$

$$= \int\limits_{B' x (0,\infty)} \frac{\partial}{\partial x_i}(f(x', t + g(x'))) dx - \int\limits_{B' x (0,\infty)} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x') \frac{\partial f}{\partial x_n}(x', t + g(x')) dx = I + II$$

כעת $I=0$ לפי ניוטון–לייבניץ. מתקיים:

$$II=-\int\limits_{B'}\frac{\partial g}{\partial x_i}(x')dx'\int\limits_{g(x')}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial x_n}(x',x_n)dx_n=\int\limits_{B'}f(x',g(x'))\frac{\partial g}{\partial x_i}(x')dx'=\int\limits_{\partial G}(fN_i)ds$$

■

<u>הערה</u>: במשפט הדיברגנץ נבחר $G=B(a,r)$. נקבל:

$$\int\limits_{S(a,r)}(F\cdot N)ds=\int\limits_{B(a,r)}(div\ F)dx=div\ F(\xi)V(B(a,r))$$

כאשר $\xi\in B(a,r)$.

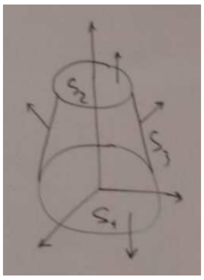
מכאן נקבל ש:

$$div\ F(a)=\lim_{r\to 0}\frac{1}{V(B(a,r))}\int\limits_{S(a,r)}(F\cdot N)ds$$

<u>מסקנה</u>: אם $div\ F=1$ אז $V(G)=\int\limits_{\partial G}(F\cdot N)ds$.

<u>דוגמה</u>: חשב את נפחו של החרוט הקטום הנתון על–ידי $x^2+y^2\le(2-z)^2$, $0\le z\le 1$.

<u>פתרון</u>: נבחר $F=\frac{1}{2}(x,y,0)$.



אזי

$$V=\int\limits_{S_1}(F\cdot N)ds+\int\limits_{S_2}(F\cdot N)ds+\int\limits_{S_3}(F\cdot N)ds\underbrace{=}_{N=(0,0,\pm1)\text{ Over }S_1\text{ and }S_2}\int\limits_{S_3}(F\cdot N)ds$$

ההצגה של S_3 היא:

$$r(u,v)=((2-u)\cos v,(2-u)\sin v,u),\qquad v\in[0,2\pi],u\in[0,1]$$

מתקיים:

$$r'_u\times r'_v=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -\cos v & -\sin v & 1\\ -(2-u)\sin v & (2-u)\cos v & 0\end{vmatrix}=-(2-u)(\cos v,\sin v,1)$$

מחבינה גיאומטרית, הכיוון של הנורמל החיצוני הוא בכיוון ציר z. לכן הרכיב השלישי של N צריך להיות חיובי. אבל בחישוב שלנו בחרנו הצגה פרמטרית באופן טבעי, וזה נותן אוריינטציה הפוכה, לפי המינוס בדטרמיננטה. לכן נצטרך להפוך סימן בתשובה הסופית.

לכן:

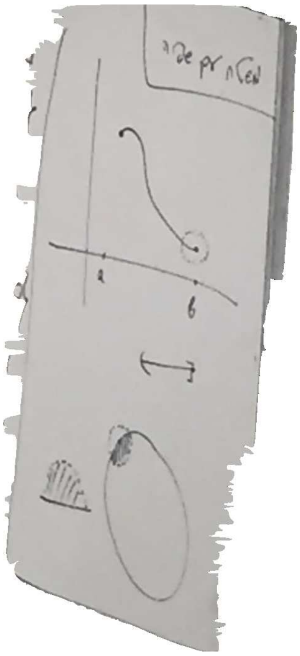
$$V=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\int(-(2-u)^2\cos^2 v-(2-u)^2\sin^2 v)dudv=\pi\int\limits_0^1(2-u)^2du=\frac{7}{3}\pi$$

<u>דוגמה</u>: בעזרת משפט הדיברגנץ חשב את $I=\int\limits_M (F\cdot N)ds$, כאשר $F=(x^2,y^2,z^2)$, M הוא מעטפת החרוט $\left\{0\le z\le h, x^2+y^2=z^2\right\}$ ו-N הוא הנורמל החיצוני.

<u>פתרון</u>: נסמן $B=\left\{z=h, x^2+y^2\le h^2\right\}$. נקבל ש-

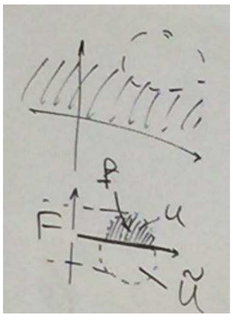
$$I=\int\limits_{M\cup B}(F\cdot N)ds-\int\limits_B(F\cdot N)ds=2\int\limits_G(x+y+z)dxdydz-\pi h^4=\frac{\pi}{2}h^4-\pi h^4=-\frac{\pi}{2}h^4$$

1 משטח עם שפה



נתבונן בקבוצה $H^k=\left\{(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{R}^k : x_k\ge 0\right\}$. נגדיר את השפה של H^k כקבוצה $\partial H^k=\left\{(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{R}^k : x_k=0\right\}$.
ניתן לחלק את הקבוצות הפתוחות ב-H^k לשני סוגים:

1. אלה שלא חותכות את ∂H^k (קבוצות פתוחות רגילות ב-$\mathbb{R}^k$).
2. אלה שחותכות את ∂H^k (קבוצות "חצי-פתוחות" ב-$\mathbb{R}^k$).



הגדרה 1: תהי u קבוצה פתוחה ב-H^k מסוג שני. תהי $f: u \to \mathbb{R}^k$. נאמר ש-f **דיפרנציאבילית** על u אם קיימת פונקצייה דיפרנציאבילית $F: \tilde{u} \to \mathbb{R}^k$ כאשר $\tilde{u}$ קבוצה פתוחה ב-$\mathbb{R}^k$ המכילה את u ו-$F \equiv f$ על u.

הגדרה 2: קבוצה $M \subset \mathbb{R}^k$ נקראת **משטח k-מימדי עם שפה** אם לכל נקודה $x \in M$ קיימת סביבה $M \cap B_x$ וקיימת קבוצה פתוחה $\Omega \subset H^k$ וקיים הומיאומורפיזם F כך ש-$F(\Omega) = M \cap B_x$ וגם $rank\, F'(t) = k$ לכל $t \in \Omega$.

הגדרה 3: אם בהגדרה הנ"ל הקבוצה Ω היא מסוג שני אזי נאמר שהקבוצה $F(\Omega \cap \partial H^k)$ שייכת לשפה של M.
נסמן את האוסף של כל נקודות השפה ב-∂M ונקרא לו **השפה של** M.

הגדרה 4: הקבוצה $M \backslash \partial M$ נקראת **פנים** M ונסמן אותה $int\ M$.

הערה: אם בהגדרה אין קבוצות מסוג שני אז נקבל ש-$\partial M = \phi$.

למה: יהי M משטח k-מימדי עם שפה $\partial M \neq \phi$. אזי ∂M הוא משטח $(k-1)$-מימדי רגיל.

הערה: נקבל שמתקיים $\partial(\partial M) = \phi$.

הוכחה: האטלס של M כולל מפות (φ_i, Ω_i^1) ו-(φ_j, Ω_j^2) כאשר Ω_i^1 קבוצות פתוחות ב-H^k מסוג ראשון ו-Ω_j^2 קבוצות פתוחות ב-H^k מסוג שני.

אזי $(\tilde{\Psi}_j, \Omega_j^2 \cap \partial H^k)$ האטלס של ∂M, כאשר $\tilde{\Psi}_j(t_1, \ldots, t_{k-1}) = \Psi_j(t_1, \ldots, t_{k-1}, 0)$.

מתקיים שהקבוצות $\Omega_j^2 \cap \partial H^k$ פתוחות ב-$\mathbb{R}^{k-1}$ ו-$rank\ \tilde{\Psi}_j = k-1$ על $\Omega_j^2 \cap \partial H^k$.

■

דוגמות:

1. נתבונן בעיגול $\{x^2+y^2 \leq 1\}$. נגדיר $F(t,u) = ((1-u)\cos t, (1-u)\sin t)$, כאשר $(t,u) \in (-\pi,\pi) \times [0,\frac{1}{2}) = \Omega_1$ וגם $(t,u) \in (0,2\pi) \times [0,\frac{1}{2}) = \Omega_2$. מתקיים ש-

$$F(\Omega_1 \cap \mathbb{R}) \cup F(\Omega_2 \cap \mathbb{R}) = \{x^2+y^2=1\}$$

אינפי 4 – הרצאה 11

ליאור פולק

29 במאי 2016

<u>דוגמה:</u> (ללא הוכחה) כל קבוצה קשירה וקומפקטית ב-$\mathbb{R}^2$ עם שפה מ-$\mathbf{C}^1$ היא משטח עם שפה שמתלכדת עם השפה הטופולוגית שלה.

<u>דוגמה:</u> כל משטח 2-מימדי ב-$\mathbb{R}^3$ עם שפה ניתן להציג (באופן מקומי) כ-

$$M = F(\Omega)$$

כאשר $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ קבוצה קומפקטית מהדוגמה הקודמת ומתקיים

$$\partial M = F(\partial\Omega)$$

<u>דוגמה:</u> נתבונן בחצי-ספירה

$$S_2^+ = \left\{x^2 + y^2 + z^2 = R^2 | z \geq 0\right\}$$

נראה ש-

$$\partial S_2^+ = \left\{x^2 + y^2 = R^2 | z = 0\right\}$$

נגדיר:

$$r(u,v) = (R\cos u\cos v, R\sin u\cos v, R\sin v)$$

ו-[1]

$$\Omega_1 = \left\{(u,v) \in (0,2\pi) \times [0,\tfrac{\pi}{2})\right\}$$
$$\Omega_2 = \left\{(u,v) \in (-\pi,\pi) \times [0,\tfrac{\pi}{2})\right\}$$

מתקיים:

$$r(u,0) = (R\cos u, R\sin u, 0)$$

ולכן:

$$r\left((\Omega_1 \cap \mathbb{R}) \cup (\Omega_2 \cap \mathbb{R})\right) = \partial S_2^+$$

---

[1] גם אפשר לבחור למשל

$$x^2 + y^2 < R^2, \quad z = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$$

<u>דוגמה</u>: נגדיר

$$\left\{x^2+y^2=R^2|a\leq z\leq b\right\}$$

אזי השפה של M היא האיחוד של שני המעגלים

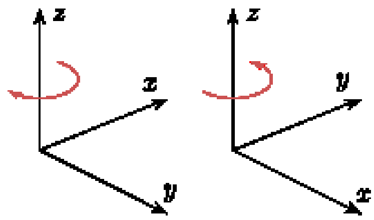
$$S_a=\left\{x^2+y^2=R^2|z=a\right\}$$
$$S_b=\left\{x^2+y^2=R^2|z=b\right\}$$

<u>הגדרה 1</u>: יהי $M\subset\mathbb{R}^n$ משטח עם שפה. יהי F הומיאומורפיזם מהגדרת משטח עם שפה, כך ש-$F(t)=x$.
אזי **המרחב המשיק** ל-M בנקודה x מוגדר ע"י

$$T_x(M)=\left\{F'(t)(\xi)|\xi\in\mathbb{R}^k\right\}$$

1 אוריינטציה

ב־$\mathbb{R}$ יש שני כיוונים- חיובי ושלילי. ב־$\mathbb{R}^2$ יש עם כיוון השעון ונגד כיוון השעון. ב־$\mathbb{R}^3$ יש כלל יד ימין וכלל יד שמאל:



נשים לב שאנו קובעים את הכיוון החיובי להיות כמו בכלל יד ימין (אהלן מפזקים).

יהי V מרחב וקטורי k־מימדי. אם $(v_1,\ldots,v_k)$ ו־$(w_1,\ldots,w_k)$ הם הבסיסים של V אזי

$$w_j=\sum_{i=1}^{k}a_{ij}v_i$$

כאשר $A=\{a_{ij}\}$ מטריצת מעבר. אם אלו הם בסיסים אורתונורמליים אזי $\det A=\pm1$.

<u>הגדרה 2</u>: נאמר שהבסיסים **שקולים** אם $\det A>0$. באמצעות ההגדרה ניתן לחלק את כל הבסיסים לשתי מחלקות שקילות. מכאן נובעת

<u>הערה</u>: לכל מרחב וקטורי יש בדיוק שתי אוריינטציות.

<u>הגדרה 3</u>: נאמר שאחד מהבסיסים מגדיר **אוריינטציה**. לקבוע אוריינטציה זה אומר לקבוע אחד מהבסיסים.

<u>הגדרה 4</u>: אוריינטציה מושרית על השפה.

יהי $M\subset\mathbb{R}^3$ משטח 2־מימדי עם שפה. נניח $x\in\partial M$. אזי מתקיים:

$$T_x(\partial M)\subset T_x(M)$$

וגם $\dim T_x(M)=2$, ו־$\dim T_x(\partial M)=1$. לכן קיים וקטור $\nu\in T_x(M)$ שאורתוגונלי ל־$T_x(\partial M)$.

<u>הגדרה 5</u>: נאמר ש־$h\in T_x(\partial M)$ מגדיר אוריינטציה מושרית על ∂M אם $[\nu,h]$ מגדיר את אותה האוריינטציה כמו $[r'_u,r'_v]$ כאשר $\nu\in T_x(M)$, $h\perp\nu$ ו־ν חיצוני ($r(u,v)$ ההצגה הפרמטרית של M).
שימו לב שאתם לא מתבלבלים בין ניו (ν) ו־וי (v).

אנו יודעים שהנורמל

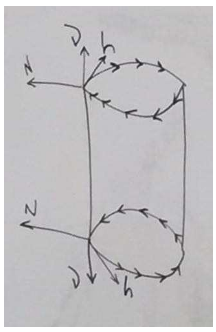
$$N=\frac{r'_u\times r'_v}{||r'_u\times r'_v||}$$

מגדיר אוריינטציה על M.

לפי ההגדרה של $r'_u\times r'_v$, הבסיס $[N,r'_u,r'_v]$ מגדיר את אותה האוריינטציה כמו $[e_1,e_2,e_3]$, וקטורי הבסיס הסטנדרטי.

מכאן נובע ש־$[N,\nu,h]$ מגדיר את אותה האוריינטציה כמו $[e_1,e_2,e_3]$ (שהרי $[N,\nu,h]=[\nu,h,N]$ לפי הזזה ציקלית [אהלן מופשטת 1], שכפי שראינו שקול ל־$[e_1,e_2,e_3]$).

<u>דוגמה</u>:



<u>הגדרה 6</u>: נניח $F=(P,Q,R):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ שדה וקטורי מ-$\mathbf{C}^1$.
הוקטור $\text{curl } F$ (גם מסומן $\text{rot } F$) מוגדר ע"י:

$$\text{curl } F=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

משפט גרין אומר ש-

$$\int\limits_{(\partial G)^+} Pdx+Qdy=\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

נניח ש-S משטח 2-מימדי ב-$\mathbb{R}^3$ שנמצא במישור XY.

אזי אם ההצגה של S היא

$$S=\{z=0|(x,y)\in G\}$$

ניתן לרשום את משפט גרין כך:

$$\int\limits_S (\text{curl } F)Nds=\int\limits_{(\partial S)^+} F\cdot dr$$

<u>משפט 1</u>: (משפט סטוקס)

יהי $M\subset\mathbb{R}^3$ משטח 2-מימדי בעל אוריינטציה. נניח M מ-$\mathbf{C}^2$. נניח $F\in\mathbf{C}^1(M)$ שדה וקטורי. אזי:

$$\int\limits_M (\text{curl } F)\cdot Nds=\int\limits_{\partial M} F\cdot dr$$

כאשר על ∂M נבחרת האוריינטציה המושרית.

<u>הערה</u>: אם Γ היא עקומה סגורה אזי ל-$\int\limits_\Gamma F\cdot dr$ קוראים **צירקולציה** של F סביב Γ.

<u>הערה</u>: נבחר במשפט סטוקס $M=D_r(a)$. אזי נקבל ש-

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\int\limits_{D_r(a)} (\text{curl } F)\cdot Nds=\text{curl } F(a)\cdot N$$

מכאן נשתמש בסטוקס לקבלת

$$\text{curl } F(a)\cdot N=\lim_{s\to 0}\frac{1}{\pi s^2}\int\limits_{C_S(a)} F\cdot dr$$

דוגמה: נניח שגוף קשיח מסתובב סביב ציר z עם מהירות זוויתית קבועה $\bar{\omega} = (0, 0, \omega)$.

יהי $\vec{v}$ שדה וקטורי של המהירות הרגילה (דהיינו הקווית) של הנקודה $M = (x, y, z)$.

עקב פיזוק יתר נמצא כי

$$\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-\omega y, \omega x, 0)$$

מכאן נקבל

$$\text{curl } \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 2\omega) = 2\vec{\omega}$$

הוכחה: (משפט סטוקס)

נוכיח את המשפט במקרה בו M נתון ע"י הגרף

$$(x, y) \in G \subset \mathbb{R}^2, \quad z = f(x, y)$$

כאשר G קבוצה קומפקטית שמקיימת את התנאים של משפט גרין.

נניח שההצגה של ∂G היא $x = x(t),\ y = y(t), \quad t \in [a, b]$.

אזי ההצגה של ∂M היא

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = f(x(t), y(t)), \quad t \in [a, b]$$

נניח ש-N היא מהצורה

$$N = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$$

מצד אחד, מתקיים:

$$\int\limits_M (\text{curl } F) \cdot N ds = \iint\limits_G \left[-\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)(x, y, f(x, y))\frac{\partial f}{\partial x} - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right] dxdy$$

מצד שני,

$$\int\limits_{\partial M} F \cdot dr \underbrace{=}_{\text{Definition + Chain Rule}} \int\limits_a^b \left(P(x(t), y(t), f(x(t), y(t)))\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt} + R\left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right]\right) dt =$$

$$= \int\limits_a^b \left[\left(P + R\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \left(Q + R\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt}\right] dt \underbrace{=}_{\text{Definition}} \int\limits_{(\partial G)^+} \left(P + R\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(Q + R\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy$$

$$= \iint\limits_G \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(Q + R\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(P + R\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right] dxdy$$

אינפי 4 – הרצאה 12

ליאור פולק

19 ביוני 2016

<u>הוכחה</u>: (משפט סטוקס)

נוכיח את המשפט במקרה בו M נתון ע"י הגרף

$$(x,y)\in G\subset\mathbb{R}^2,\quad z=f(x,y)$$

כאשר G קבוצה קומפקטית שמקיימת את התנאים של משפט גרין.

מצד אחד, מתקיים:

$$\int\limits_{M}(\text{curl }F)\cdot Nds=\iint\limits_{G}\left[-\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial x}-\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial y}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right]dxdy$$

מצד שני,

$$\int\limits_{\partial M}F\cdot dr=\iint\limits_{G}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(Q+R\frac{\partial f}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(P+R\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]dxdy$$

<u>נשים לב</u>– $Q=Q(x,y,f(x,y)),\quad R=R(x,y,f(x,y))$

נרשום–

$$\int\limits_{\partial M}F\cdot dr=\iint\limits_{G}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial z}\underline{\frac{\partial f}{\partial x}}+\frac{\partial R}{\partial x}\underline{\underline{\frac{\partial f}{\partial y}}}+\cancel{\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}}+\cancel{R\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}}-\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial z}\underline{\underline{\frac{\partial f}{\partial y}}}-\frac{\partial R}{\partial y}\underline{\frac{\partial f}{\partial x}}-\cancel{\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}}-\cancel{R\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}}\right]$$

$$=\int\limits_{M}(\text{curl }F)\cdot Nds$$

■

1 דוגמות לשימושי משפט סטוקס

1. נניח $F=\left(x^2z+\sqrt{x^3+x^2+2},xy,xy+\sqrt{z^3+z^2+2}\right)$.
חשב $I=\int\limits_{\Gamma}F\cdot dr$ כאשר Γ היא המעגל $\left\{x^2+z^2=1,y=0\right\}$ עם אורייטנציה נגד כיוון השעון אם מסתכלים בכיוון החיובי של ציר OY.

מתקיים: $\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=x^2-y$. נבחר $N=(0,1,0)$, $M=\left\{x^2+z^2\le 1,y=0\right\}$. לכן:

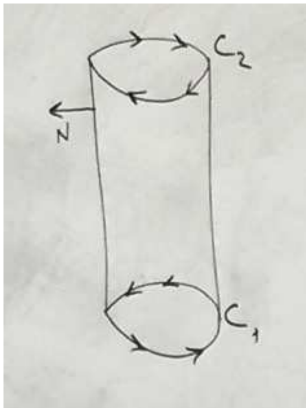
$$I=\int\limits_{M}(\text{curl }F\cdot N)ds=\iint\limits_{\{x^2+z^2\le 1\}}x^2dxdz=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1\rho^3\cos^2\varphi d\rho d\varphi=\frac{\pi}{4}$$

2. נניח $F=\left(\cos x\sin z+xy,x^3,e^{x^2+z^2}-e^{y^2+z^2}-\tan xy\right)$.
חשב $\int\limits_{M}(\text{curl }F\cdot N)ds$ כאשר $M=\left\{9x^2+4y^2+36z^2=36,z\ge 0\right\}$ עם הנורמל החיצוני.

נסמן $M'=\left\{9x^2+4y^2\le 36,z=0\right\}$. אזי

$$\int\limits_{M}(\text{curl }F\cdot N)ds=\int\limits_{M'}(\text{curl }F\cdot N)ds=\iint\limits_{\{9x^2+4y^2\le 36\}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint\limits_{\{9x^2+4y^2\le 36\}}(3x^2-x)dxdy=18\pi$$

3. נניח $M=\left\{x^2+y^2=4,-3\le z\le 1\right\}$ ו-$F=(yz,z,y)$.



מתקיים:

$$\begin{aligned}
&t\in[0,2\pi],\ (2\cos t,2\sin t,-3) &&: C_1\\
&t\in[0,2\pi],\ (2\cos t,-2\sin t,1) &&: C_2
\end{aligned}$$

לכן:

$$\int\limits_{C_1}F\cdot dr=\int\limits_0^{2\pi}(12\sin^2 t-6\cos t)dt=12\pi$$

$$\int\limits_{C_2}F\cdot dr=\int\limits_0^{2\pi}(4\sin^2 t-2\cos t)dt=4\pi$$

ומכאן $\int\limits_{\Gamma} F \cdot dr = 16\pi$.

מצד שני,

$$\text{curl } F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & z & y \end{vmatrix} = (0, y, -z)$$

נשתמש בהצגה:

$$r(u,v) = (2\cos u, 2\sin u, v), \quad u \in [0, 2\pi],\ v \in [-3, 1]$$

מתקיים:

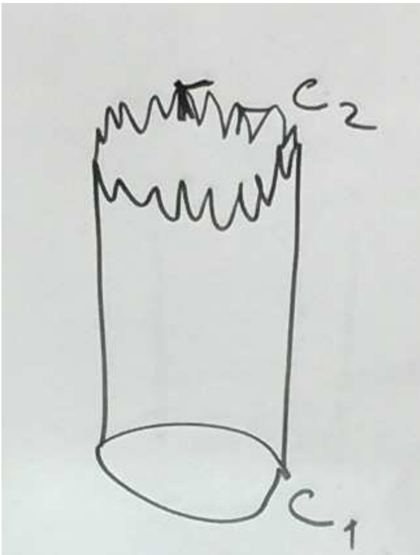
$$r'_u \times r'_v = (2\cos u, 2\sin u, 0)$$

לכן:

$$\int\limits_{M} (\text{curl } F \cdot N) ds = \int\limits_{-3}^{1} \int\limits_{0}^{2\pi} (4\sin^2 u) du dv = 16\pi$$

שיטה זו מאפשרת לנו לבדוק את התשובות שיצאו לנו בעוד דרך. <u>שימושי למבחן!</u>

4. (בקבוק שבור)
נניח שבסיס הבקבוק הוא $\left\{x^2 + y^2 = 1, z = 0\right\}$ ונניח ש-$F = (xz, yz + x, e^{z^2})$. חשבו את $\int\limits_{C_2} F \cdot dr$.



מתקיים $\text{curl } F = (-y, x, 1)$, $N = (2x, 2y, 0)$. לכן $\text{curl } F \cdot N = 0$.

5. בעזרת משפט סטוקס חשבו את $\int\limits_{\Gamma} ydx+zdy+xdz$ כאשר Γ היא חיתוך של הספירה $\{x^2+y^2+z^2=9\}$ עם המישור $x+y+z=0$, והכיוון על Γ הוא נגד כיוון השעון אם מסתכלים בכיוון החיובי של ציר OX.

החיתוך כמובן יהיה מעגל עם רדיוס מקסימלי (3). נשים לב כי

$$N=\frac{r'_u\times r'_v}{||r'_u\times r'_v||},\quad ds=||r'_u\times r'_v||dudv$$

נבחר M כעיגול שנמצא במישור $x+y+z=0$ עם שפה Γ. מתקיים:

$$\text{curl } F=-(1,1,1),\quad N=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

ולכן:

$$\int\limits_M \text{curl } F\cdot Nds=-\frac{3}{\sqrt{3}}\mu(M)=-\frac{27}{3}\pi$$

נחזור לתבניות דיפרנציאליות.

<u>תזכורת</u>: נניח $\omega=\omega_1dx_1+\ldots+\omega_ndx_n$ תבנית דיפרנציאלית.

ω נקראת **סגורה** אם $\frac{\partial\omega_j}{\partial x_i}=\frac{\partial\omega_i}{\partial x_j}$ לכל i,j.

ω נקראת **מדוייקת** אם קיימת f כך ש-ω $df=\omega$.

כבר ראינו- מדוייקת $\Leftarrow$ סגורה.

למת פואנקרה נתנה את הכיוון ההפוך- אם ω מוגדרת בתחום כוכבי אזי סגורה $\Leftarrow$ מדוייקת.

<u>הגדרה 1</u>: תהי $G\subset\mathbb{R}^3$ קבוצה פתוחה וקשירה. נאמר ש-G היא **תחום פשוט-קשר** אם לכל עקומה פשוטה $\gamma\subset G$ קיים משטח 2-מימדי $M\subset G$ בעל אוריינטציה, כך ש-$\partial M=\gamma$.

<u>משפט 1</u>: יהי $G\subset\mathbb{R}^3$ תחום פשוט-קשר. אזי תבנית לינארית $\omega\in C^1(G)$ היא סגורה $\iff$ היא מדוייקת.

<u>הוכחה</u>: נניח $\omega=Pdx+Qdy+Rdz$, ונניח ש-ω סגורה, דהיינו $\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\quad\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z},\quad\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$.

לכן, אם $F=(P,Q,R)$ אזי $\text{curl } F=0$. תהי γ מסילה סגורה. נבחר M כך ש-$\partial M=\gamma$.

לפי סטוקס נקבל $\int\limits_\gamma F\cdot dr=\int\limits_M(\text{curl } F\cdot N)ds=0$.

מכיוון ש-γ היא מסילה סגורה כללית, נקבל לפי משפט מתחילת הקורס ש-ω מדוייקת.

■

<u>מסקנה</u>: יהי $G\subset\mathbb{R}^3$ תחום פשוט-קשר. נניח $F:G\to\mathbb{R}^3$ שדה וקטורי מ-$\mathbf{C}^1(G)$.

אזי $\text{curl } F=0\iff$ קיימת $f:G\to\mathbb{R}^3$, $f\in\mathbf{C}^2(G)$, כך ש-$F=\text{grad } f$.

<u>הוכחה</u>: נגדיר $F=(P,Q,R)$ ו-$\omega=Pdx+Qdy+Rdz$.

אזי $F=\text{grad } f\iff\omega$ מדוייקת $\iff\omega$ סגורה $\iff\text{curl } F=0$.

<u>משפט 2</u>: יהי $G \subset \mathbb{R}^3$ תחום כוכבי. נניח $F : G \to \mathbb{R}^3$ שדה וקטורי מ-$\mathbf{C}^1(G)$.

אזי $\mathrm{div}\ F = 0 \iff$ קיים שדה $\Phi : G \to \mathbb{R}^3$, $\Phi \in \mathbf{C}^2(G)$ כך ש-$F = \mathrm{curl}\ f$.

<u>הוכחה</u>: $\Rightarrow$ נניח ש-

$$F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

אזי:

$$\mathrm{div}\ F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} = 0$$

$\Leftarrow$ נניח ש-$\mathrm{div}\ F = 0$. נסמן $F = (p, q, r)$. נמצא Φ מהצורה $\Phi = (0, Q, R)$.

אזי $\mathrm{curl}\ \Phi = F \iff \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = p \\ -\frac{\partial R}{\partial x} = q \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = r \end{cases}$

נניח ש-(x_0, y_0, z_0) הכוכב של G (הנקודה שהקו המחבר בינה לבין כל נקודה אחרת ב-G נמצא ב-G).

אזי

$$R = -\int_{x_0}^{x} q(u, y, z)du + g(y, z), \quad Q = \int_{x_0}^{x} r(u, y, z)du + h(y, z)$$

נקבל אפוא

$$P = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = -\int_{x_0}^{x} \left(\frac{\partial q}{\partial y}(u, y, z) + \frac{\partial r}{\partial z}(u, y, z)\right) du + \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial z} \underbrace{=}_{\mathrm{div}\ F=0} -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial p}{\partial x}(u, y, z)du + \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial z} =$$

$$= p(x, y, z) - p(x_0, y, z) + \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial z}$$

נבחר למשל $h = 0$ ו-g:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = (x_0, y, z)$$

ולכן נקבל

$$g = \int_{y_0}^{y} p(x_0, v, z)dv$$

לבסוף,

$$Q = \int_{x_0}^{x} r(u, y, z)du, \quad R = -\int_{x_0}^{x} q(u, y, z)du + \int_{y_0}^{y} p(x_0, v, z)dv$$

■

<u>הערה</u>: המשפט איננו נכון אם G הוא רק תחום פשוט–קשר.

נראה זאת:

נגדיר $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1, (x,y,z) \ne 0\right\}$. אזי G תחום פשוט קשר.

עוד נגדיר $F(x,y,z) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$. אזי $\text{div } F = 0$.

נניח שקיימת Φ כך ש–$\text{curl } \Phi = F$.

מצד אחד, מתקיים $F \cdot N = 1$ על S^2, ולכן

$$\int\limits_{S^2} (F \cdot N) ds = \mu(S^2) = 4\pi$$

מצד שני, לפי משפט סטוקס,

$$\int\limits_{S^2} (F \cdot N) ds = \int\limits_{S^2} (\text{curl } \Phi \cdot N) ds = 0$$

<u>משפט 3</u>: (נקודת השבת של בראואר)

נסמן: $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \le 1\}$, $S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| = 1\}$.

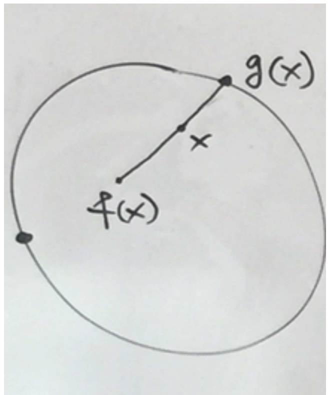
תהי $f : B_n \to B_n$, $f \in \mathbf{C}^2$. אזי קיימת נקודה $x \in B_n$ כך ש–$f(x) = x$.

להוכחת המשפט נביא למה חשובה.

<u>למה</u>: לא קיימת פונקצייה $f \in \mathbf{C}^2(B_n)$ כך ש $f : B_n \to S_{n-1}$ וגם $f(x) = x$ לכל $x \in S_{n-1}$.

<u>הוכחת המשפט</u>: נניח כעת את נכונות הלמה (נוכיח אותה בהמשך). נניח $f(x) \ne x$ לכל $x \in B_n$.

נגדיר את $g(x)$ באופן הבא:



$g(x)$ היא הנקודה על S_{n-1} המתלכדת עם נקודת החיתוך של הקרן היוצא מ–$f(x)$ לכיוון x עם S_{n-1}. מתקיים $g(x) = x$ לכל $x \in S^{n-1}$. כמו כן $g : B_n \to S_{n-1}$. נותר להראות $g \in \mathbf{C}^2$.

מתקיים $g(x) = tx + (1-t)f(x)$ כאשר $t = t(x)$ כך ש–$||g|| = 1$.

נסמן $\psi(x) = x - f(x)$. אזי

$$||t\psi(x) + f(x)|| = 1 \iff \left(\sum_{i=1}^n \psi_i^2\right) t^2 + 2t \sum_{i=1}^n \psi_i f_i + \sum_{i=1}^n f_i^2 - 1 = 0$$

נקבל $t \in \mathbf{C}^2$ ולכן $g \in \mathbf{C}^2$ ולפי הלמה נקבל סתירה.

■

אינפי 4 – הרצאה 13

ליאור פולק

23 ביוני 2016

<u>למה</u>: לא קיימת פונקצייה $f\in\mathbf{C}^2(B_n)$ כך ש- $f:B_n\to S_{n-1}$ וגם $f(x)=x$ לכל $x\in S_{n-1}$.

<u>הוכחה</u>: נניח בה"כ $n=3$ ונסמן $f=(f_1,f_2,f_3)$. מתקיים $\sum\limits_{i=1}^{3}f_i^2(x)=1$ על B_3.

נגזור ונקבל $\sum\limits_{i=1}^{3}f_i\frac{\partial f_i}{\partial x_j}=0$ לכל j (דהיינו, x,y,z).

$f(x)\neq 0$ ולכן $J_f(x)=0$. נפתח את הדטרמיננטה לפי מינורים –

$$J_f(x)=\left|\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\end{pmatrix}\right|=\sum_{j=1}^{3}(-1)^{j+1}\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_j}M_{1j}\right]=\sum_{j=1}^{3}(-1)^{j+1}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(f_1M_{1j}\right)-f_1\frac{\partial M_{1j}}{\partial x_j}\right]$$

אם נסמן $g=(f_2,f_3)$ נקבל

$$\sum_{j=1}^{3}(-1)^{j+1}\left[\frac{\partial M_{1j}}{\partial x_j}\right]=\frac{\partial}{\partial x_1}\det\left[\frac{\partial g}{\partial x_2},\frac{\partial g}{\partial x_3}\right]-\frac{\partial}{\partial x_2}\det\left[\frac{\partial g}{\partial x_1},\frac{\partial g}{\partial x_3}\right]+\frac{\partial}{\partial x_3}\det\left[\frac{\partial g}{\partial x_1},\frac{\partial g}{\partial x_2}\right]=$$

$$=\det\left[\frac{\partial^2 g}{\partial x_1\partial x_2},\frac{\partial g}{\partial x_3}\right]+\det\left[\frac{\partial g}{\partial x_2},\frac{\partial^2 g}{\partial x_1\partial x_3}\right]-\det\left[\frac{\partial^2 g}{\partial x_2\partial x_1},\frac{\partial g}{\partial x_3}\right]-$$

$$-\det\left[\frac{\partial g}{\partial x_1},\frac{\partial^2 g}{\partial x_2\partial x_3}\right]+\det\left[\frac{\partial^2 g}{\partial x_3\partial x_1},\frac{\partial g}{\partial x_2}\right]+\det\left[\frac{\partial g}{\partial x_1},\frac{\partial^2 g}{\partial x_3\partial x_2}\right]=0$$

לכן $\sum\limits_{j=1}^{3}(-1)^{j+1}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(f_1M_{1j}\right)\right]$.

ממשפט הדיברגנץ מתקיים

$$0=\iiint\limits_{B_3}\sum_{j=1}^{3}(-1)^{j+1}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(f_1M_{1j}\right)\right]dx_1dx_2dx_3=\iint\limits_{S_2}f_1(M_{11},-M_{12},M_{13})\cdot NdS$$

נניח $x\in S_2$. יהי $V\in T_x(S_2)$. אזי קיימת עקומה מ-$[-1,1]$ ל-S_2 כך ש-$\gamma(0)=x$ ו-$\gamma'(0)=v$.

מתקיים $f_i(\gamma(t))=\gamma_i(t)$.

נגזור (האם אתם רואים פה תבנית?) ונקבל $\nabla f_i(x)\cdot v=\gamma_i'(0)=v\cdot e_i$ ולכן $\left(\nabla f_i-e_i\right)v=0$.

לכן קיימים $\lambda_i\in\mathbb{R}$ כך ש$\nabla f_i-e_i=\lambda_iN$.

מכאן נובע שמתקיים

$$(M_{11},-M_{12},M_{13})\cdot N=det\left[N,\nabla f_2,\nabla f_3\right]=det\left[N,e_2+\lambda_2N,e_3+\lambda_3N\right]=det\left[N,e_2,e_3\right]=N_1$$

לכן

$$0=\iint_{S_2}f_1\left(M_{11},-M_{12},M_{13}\right)\cdot NdS=\iint_{S_2}(x_1,0,0)\cdot NdS=\iiint_{B_3}dx_1dx_2dx_3=V(B_3)$$

אבל נפח ספירת היחידה אינו 0 – בסתירה.

שאלות ממבחן

<u>שאלה</u>: נניח M חלק החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ שבתוך הגליל $x^2+y^2=2z$. חשב את $I=\int_M\left(x^4-y^4+y^2z^2-z^2x^2+1\right)$.
<u>תשובה</u>: ההצגה של החרוט היא $(ucos\theta, usin\theta, u)$, עם $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$. נציב את x,y במשוואת הגליל ונקבל $0\le u\le 2\cos\theta$.
מתקבל $r'_u\times r'_\theta=(-u\cos\theta,-u\sin\theta,u)$. לכן $||r'_u\times r'_\theta||=\sqrt{2}u$.

להשלימםםםםם!!!!!!!11111

<u>שאלה</u>: תהי Γ נתונה ע"י $\gamma(t)=\left(\sin t,\cos t,8-\cos^2 t-\sin t\right)$. נניח גם $F=\left(z^2-y^2,-2xy^2,e^{\sqrt{z}}\cos z\right)$. חשב את $\int\limits_\Gamma F\cdot dr$.

<u>תשובה</u>: אם $x=\sin t$ ו־$y=\cos t$ נקבל $z=8-y^2-x$ ו־$x^2+y^2=1$. לכן נבחר $M=\left\{z=8-y^2-x,x^2+y^2=1\right\}$.
ניקח $N=(-1,-2y,-1)$. מתקיים $\nabla\times F=\left(0,2z,2y-2y^2\right)$ ונקבל (ממשפט סטוקס)

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2=1}\left[-4\left(8-y^2-x\right)y-\left(xy-xy^2\right)\right]dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le1}2y^2dxdy=2\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\rho^3\sin^2\theta d\theta d\rho=\frac{\pi}{2}$$