פתרון תרגיל 9 אינפי 4

26 במאי 2015

1. במקרה שלנו: $P = yz, Q = xz, R = xy$.
לכן, נקבל:

$$\nabla \times F = (x - x, y - y, z - z) = (0, 0, 0)$$

ולכן לפי משפט סטוקס:

$$\int_C yzdx + xzdy + xydz = \iint_S (0, 0, 0) \cdot \vec{n} dS = 0$$

2. במקרה שלנו, $P = z^2 - y^2, Q = x^2 - z^2, R = y^2 - x^2$.
נחשב את הנורמל:

$$\vec{n} = \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

כמו כן:

$$\nabla \times F = (2y - (-2z), 2z - (-2x), 2x - (-2y)) = 2(y + z, z + x, x + y)$$

ולכן לפי משפט סטוקס האינטגרל שלנו יהיה:

$$\int_C = \iint_S 2(y + z, z + x, x + y) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) dS = \frac{4}{\sqrt{3}} \iint_S (x + y + z) dS$$

נזכור שאנחנו על המישור $x + y + z = 1$ ולכן:

$$\int_C = \frac{4}{\sqrt{3}} \iint_S dS$$

האינטגרל שקיבלנו מחשב את שטחו של המשטח.
המשטח שלנו ניתן להטלה על מישור xy: $z = 1 - x - y$.
אלמנט השטח יהיה:

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{3}$$

ולכן:

$$\int\limits_C = \frac{4}{\sqrt{3}} \iint\limits_S dS = \frac{4}{\sqrt{3}} \iint\limits_D \sqrt{3} dxdy = 4 \iint\limits_D dxdy$$

מהו תחום האינטגרציה D?
נפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ z = 5 - x^2 - y^2 \end{cases}$$

כלומר: $x + y + 5 - x^2 - y^2 = 1$, לכן:

$$x^2 - x + y^2 - y = 4$$

ואחרי שנשלים לריבוע נקבל:

$$(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = (\frac{3}{\sqrt{2}})^2$$

כלומר תחום האינטגרציה D הוא מעגל שרדיוסו $\frac{3}{\sqrt{2}}$ (ומרכזו בנקודה $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$) ולכן שטחו הוא $\frac{9}{2}\pi$.
אם כן, האינטגרל שלנו יהיה:

$$\int\limits_C = 4 \cdot \frac{9}{2}\pi = 18\pi$$

3. במקרה שלנו, $P = xy, Q = x^2, R = z^2$.
הנורמל (המישור הוא $-y + z = 0$) יהיה:

$$\vec{n} = \frac{(0, -1, 1)}{\sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1)$$

כמו כן:

$$\nabla \times F = (0-0, 0-0, 2x-x) = (0,0,x)$$

ולכן לפי משפט סטוקס נקבל:

$$\int_C F d\vec{r} = \iint_S (0,0,x)\cdot(0,-1,1)\frac{1}{\sqrt{2}}dS = \frac{1}{\sqrt{2}}\iint_S x dS$$

המשטח S ניתן להטלה על מישור xy, ע"י $z = x^2+y^2$.
אלמנט השטח הוא:

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2} = \sqrt{1+4x^2+4y^2}$$

ולכן:

$$\int_C = \frac{1}{\sqrt{2}}\iint_D x\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy =$$

מהו תחום האינטגרציה D?
נפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} z = y \\ z = x^2+y^2 \end{cases}$$

כלומר $x^2+y^2-y=0$. נשלים לריבוע ונקבל:

$$x^2+(y-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

כלומר התחום D הוא מעגל עם רדיוס $\frac{1}{2}$ ומרכז בנקודה $(0,\frac{1}{2})$.
נעבור לקואורדינטות קוטביות:

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

כאשר $0 \le r \le \frac{1}{2}, 0 \le \theta \le 2\pi$.

היעקוביאן הוא r, ולכן:

$$\int\limits_C = \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \int\limits_0^{2\pi} r\cos\theta\sqrt{1+4r^2\cos^2\theta+4r^2\sin^2\theta}d\theta dr =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{1}{2}} r\sqrt{1+4r^2}(\int\limits_0^{2\pi} \cos\theta d\theta)dr = 0$$

כלומר האינטגרל שווה ל-0.

4. נתבונן בשתי המיספירות, חצאי ספירה, למשל העליונה והתחתונה.
הן חולקות את אותם השוליים - מעגל ("מעגל גדול") אך בכיוונים מנוגדים.
נסמן את ההמיספירות ב$-S_1, S_2$ ונוכל לכתוב:

$$\iint\limits_S (\nabla\times F)\cdot\vec{n}dS = \iint\limits_{S_1} (\nabla\times F)\cdot\vec{n}dS + \iint\limits_{S_2} (\nabla\times F)\cdot\vec{n}dS =$$

לפי משפט סטוקס:

$$= \int\limits_C Fd\vec{r} + \int\limits_{-C} Fd\vec{r} = \int\limits_C Fd\vec{r} - \int\limits_C Fd\vec{r} = 0$$

כלומר האינטגרל שווה לאפס.