

הגדרות, מסקנות וקריטריונים של אינטגרביליות

יובל בר

08.07.2022

1 הגדרות

• האינטגרל המסוים של f בקטע $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{P \rightarrow 0} \sigma(P) \\ = \lim_{\lambda(P_n) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k \Delta_i \cdot f(d_i)$$

• תכונה מתקיימת **כמעט בכל הקטע (כב"ה)** $[a, b]$ אם קבוצת הנקודות בקטע שאין להן התכונה היא אפסית.

2 קריטריונים

• קריטריון רימן: f אינטגרבילית $\iff f$ חסומה, והאינטגרל העליון והתחתון שווים.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\overbrace{\sum_{i=1}^k \Delta_i \omega_i}^{\bar{s}(P_n) - \underline{s}(P_n)} \right) = 0 \quad - \quad f \text{ חסומה בקטע } [a, b] \text{ ויש חלוקות } P_n \text{ שעבורם מתקיים}$$

$$\overbrace{\sum_{i=1}^k \Delta_i \omega_i}^{\bar{s}(P_n) - \underline{s}(P_n)} \leq \varepsilon \quad - \quad f \text{ חסומה בקטע } [a, b] \text{ ולכל } \varepsilon > 0 \text{ יש חלוקה } P \text{ שעבורה}$$

- פונקציה רציפה בקטע סגור אינטגרבילית.
- פונקציה מונוטונית בקטע סגור אינטגרבילית.
- **לבג חלק ב'**: אם f חסומה בקטע $[a, b]$, ורציפה כב"ה, אזי היא אינטגרבילית שם.

- בפרט, פונקציה רציפה בקטע סגור \iff חסומה, ולכן אינטגרבילית.

- בפרט, פונקציה מונוטונית בקטע סגור \Leftarrow
- חסומה, ורק אי-רציפות סליקה \Leftarrow
- מספר בן-מניה של נק' אי-רציפות \Leftarrow
- אינטגרבילית.

3 מסקנות

• f אינטגרבילית בקטע \Leftarrow

- f חסומה בקטע.

• f אינטגרבילית בקטע $[a, b]$ \Leftarrow

- בפרט f חסומה בקטע.

- f רציפה כמעט בכל הקטע.

$$|f| \text{ אינטגרבילית בקטע ומתקיים } \left| \int_a^b f dx \right| \leq \int_a^b |f| dx$$

• $f \leq g$ אינטגרביליות בקטע $[a, b]$:

$$\left| \int_a^b f dx \right| \leq \int_a^b |f| dx$$

$$\int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx$$

$$- \text{ בנוסף מתקיים } \int_a^b f dx = \int_a^b g dx \iff f = g \text{ כב"ה.}$$

• $f = g$ (אינטגרבילית) כב"ה $\iff \int_a^b f dx = \int_a^b g dx$, בפרט g אינטגרבילית.

4 המשפט היסודי

• אם f אינטגרבילית בקטע, אז $\varphi(x) := \int_a^x f(t) dt$ רציפה שם.

• **המשפט היסודי:** תהי f אינטגרבילית בקטע $[a, b]$, ותהי $\varphi(x) := \int_a^x f(t) dt$.

$$\varphi'(x) = f(x)$$

בכל הנקודות רציפות של f .

• **הנוסחה היסודית:** תהי f אינטגרבילית בקטע $[a, b]$, ותהי $\varphi(x) := \int_a^x f(t) dt$, אז

$$\int_a^b f(t) dt = \varphi(b) - \varphi(a)$$

ניתן גם להכליל ולהתנות " φ " רציפה פרט למספר סופי של נקודות, φ גזירה בפנים הקטע ו" $\varphi'(x) = f(x)$ "