תזכורת:

אריתמטיקה של עוצמות – איך הגדרנו את פעולות החשבון?

1. חיבור: נתונות κ_1, κ_2 עוצמות, כדי לחבר ניקח שתי קבוצות A, B זרות כך ש: $|A| = \kappa_1, |B| = \kappa_2$, ואז:

$$|A \cup B| = \kappa_1 + \kappa_2$$

2. כפל: $|A \times B| = \kappa_1 \kappa_2$.

3. חזקה: $\left|B^A\right| = \kappa_2^{\kappa_1}$, כאשר: $B^A = \{f | f : A \to B\}$.

משפט:

$|P(A)| = 2^{|A|}$.

הוכחה:

נגדיר: $F : P(A) \to \{0,1\}^A$ חח"ע ועל, ואז: $|P(A)| = \left|\{0,1\}^A\right| = 2^{|A|}$.

נזכור ש: $\{0,1\}^A = \{f | f : A \to \{0,1\}\}$.

לכל $B \in P(A)$, פונקציית האינדיקטור $\chi_B : A \to \{0,1\}$ (נקראת גם פונקציה מאפיינת, אופיינית...) מוגדרת כך:

$$\chi_B(a) = \begin{cases} 1 & a \in B \\ 0 & a \notin B \end{cases}$$

את F נגדיר באופן הבא: $F(B) = \chi_B$.

נוכיח ש-F חח"ע. תהיינה $B_1, B_2 \in P(A)$ כך ש: $B_1 \neq B_2$, צ"ל: $F(B_1) \neq F(B_2)$, כלומר: $\chi_{B_1} \neq \chi_{B_2}$.

אם כן, $B_1 \neq B_2$, בה"כ קיים $x \in A$ כך ש: $x \in B_1$ וגם $x \notin B_2$. לכן, לפי הגדרת האינדיקטור: $\chi_{B_1}(x) = 1, \chi_{B_2}(x) = 0$, ולכן:

$$\chi_{B_1} \neq \chi_{B_2}$$

נוכיח ש־F על. תהי: $f \in \{0,1\}^A$, ונראה שקיימת $B \in P(A)$ כך ש: $F(B) = f$, כלומר: $\chi_B = f$. נתבונן בקבוצה:

$$B = \{a \in A | f(a) = 1\}$$

אם $a \in B$, אז: $f(a) = 1 = \chi_B(a)$. אם $a \notin B$ אז: $f(a) \neq 1$ ולכן: $f(a) = 0 = \chi_B(a)$. אם כן, לכל $a \in A$, $f(a) = \chi_B(a)$, ולכן:

$$f = \chi_B$$

כנדרש. סה"כ, אכן: $|P(A)| = 2^{|A|}$.

<u>הערה - השערת הרצף:</u>

נוכיח עוד מעט ש־א $= 2^{\aleph_0}$. אפשר להתבונן בסדרת העוצמות הבאה:

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < \dots$$

השאלה היא - האם קיימת עוצמה κ המקיימת: $\aleph_0 < \kappa < 2^{\aleph_0}$? השערת הרצף אומרת שלא, כלומר העוצמה האינסופית הקטנה ביותר חוץ מ־$\aleph_0$ היא $2^{\aleph_0}$.

השערת הרצף המוכללת אומרת שלכל עוצמה אינסופית κ לא קיימת עוצמה λ כך ש: $\kappa < \lambda < 2^{\kappa}$. אפשר להראות שהשערת הרצף המוכללת שקולה לאקסיומת הבחירה.

אפשר לסמן: $\aleph_0 = \beth_0, 2^{\aleph_0} = \beth_1, 2^{2^{\aleph_0}} = \beth_2, \dots$. כמו כן, אפשר לסמן את העוצמה הבאה אחרי $\aleph_0$ ב־$\aleph_1$, את הבאה אחריה ב־$\aleph_2$ וכן הלאה. אם השערת הרצף נכונה, אז: $\aleph_n = \beth_n$ (n טבעי).

<u>משפט:</u>

$\aleph = 2^{\aleph_0}$.

נוכיח זאת באמצעות כמה טענות עזר, ונקנח בק.ש.ב.

טענה:

$\aleph = 10^{\aleph_0}$.

הוכחה:

נוכיח ש: $|(0,1)| = \left|\{0,1,\ldots,9\}^{\mathbb{N}}\right|$.

מצד אחד, נגדיר פונקציה: $F : \{0,1,\ldots,9\}^{\mathbb{N}} \to (0,1)$ כך: $F(g) = 0.g(1)0g(2)0g(3)0\ldots$ (אנחנו "דוחפים" את האפסים כדי להימנע ממקרים כמו: $0.1999999\ldots = 0.200000\ldots$). נראה ש־$F$ חח"ע. תהיינה $g_1, g_2 \in \{0,1,\ldots,9\}^{\mathbb{N}}$ שונות: $g_1 \neq g_2$, צ"ל: $F(g_1) \neq F(g_2)$, כלומר: $0.g_1(1)0g_1(2)0g_1(3)0\ldots \neq 0.g_2(1)0g_2(2)0g_2(3)0\ldots$.

אם כן, $g_1 \neq g_2$; יהי $x \in \mathbb{N}$ האיבר הקטן ביותר שעבורו: $g_1(x) \neq g_2(x)$. $g_1(x), g_2(x)$ הן הספרות במקום ה־$2x-1$ במספרים: $F(g_1), F(g_2)$. לכן, יש ספרה שבה המספרים $F(g_1), F(g_2)$ שונים, ומכיוון שאין במספרים רצף אינסופי של $9999\ldots$, המספרים שונים, כנדרש. לכן: $\left|\{0,1,\ldots,9\}^{\mathbb{N}}\right| \leq |(0,1)|$.

מצד שני, נגדיר פונקציה: $G : (0,1) \to \{0,1,\ldots,9\}^{\mathbb{N}}$ באופן הבא. ראשית, נחליט שאנו מסמנים את המספרים "הבעייתיים" בקטע, אלו שיש להם שתי הצגות עשרוניות, עם רצף של אפסים (אפשר גם לבחור רצף של תשיעיות, העיקר שנסמן אותם באופן אחיד). כל מספר בקטע הוא מספר מהצורה: $0.a_1a_2a_3a_4\ldots$ כאשר: $a_n \in \{0,\ldots,9\}$. כעת, נגדיר: $G(0.a_1a_2a_3a_4\ldots) = g$, כאשר: $g(n) = a_n$.

נראה ש־G חח"ע. יהיו $0.a_1a_2a_3a_4\ldots, 0.b_1b_2b_3b_4\ldots \in (0,1)$ שונים, צ"ל: $G(0.a_1a_2a_3a_4\ldots) \neq G(0.b_1b_2b_3b_4\ldots)$.

אם כן, מכיוון שהמספרים שונים ולכל מספר יש הצגה עשרונית אחת, קיים $i \in \mathbb{N}$ כך ש: $a_i \neq b_i$. לכן:

$$G\left(0.a_1a_2a_3a_4\ldots\right)(i) = a_i \neq b_i = G\left(0.b_1b_2b_3b_4\ldots\right)(i)$$

ולכן: $G\left(0.a_1a_2a_3a_4\ldots\right) \neq G\left(0.b_1b_2b_3b_4\ldots\right)$, כנדרש. לכן: $\left|\{0,1,\ldots,9\}^{\mathbb{N}}\right| \geq |(0,1)|$.

סה"כ, לפי ק.ש.ב., נקבל שאכן: $|(0,1)| = \left|\{0,1,\ldots,9\}^{\mathbb{N}}\right|$, כלומר: $10^{\aleph_0} = $ א.

<u>טענה:</u>

<u>$\aleph_0^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_0}$.</u>

<u>הוכחה:</u>

כדי להוכיח זאת, נמצא $F : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ חח"ע. F "הופכת" פונקציה $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ לפונקציה: $g : \mathbb{N} \to \{0,1\}$.

נזכור שפונקציה $f : \mathbb{N} \to A$ אפשר לרשום כסדרה של איברים מ־A: $f(1)\,f(2)\,f(3)\ldots$. אם כן, אפשר לחשוב על F כעל פונקציה ש"הופכת" סדרה של מספרים טבעיים לסדרה של $0,1$ (סדרה בינארית), ועושה זאת באופן חח"ע – לכל סדרת טבעיים מותאמת סדרה בינארית "משלה". F תעשה זאת באופן הבא:

$$F\left(f(1)\,f(2)\,f(3)\ldots\right) = 11\ldots11011\ldots11011\ldots1101\ldots$$

כלומר, $f(1)+1$ פעמים 1 ואז 0, ואז $f(2)+1$ פעמים 1 ואז 0, ואז $f(3)+1$ פעמים 1 ואז 0...למה F חח"ע? בסיכום.

<u>טענה:</u>

תהיינה $\kappa_1,\kappa_2,\lambda_1,\lambda_2$ עוצמות, המקיימות: $\kappa_1 \leq \kappa_2, \lambda_1 \leq \lambda_2$ אז: $\kappa_1^{\lambda_1} \leq \kappa_2^{\lambda_2}$, כאשר: $0 < \kappa_2$.

<u>הוכחה:</u>

בסיכום, עדיף על הבלאגן שרשמנו פה בהרצאה עצמה.

<u>מסקנה:</u>

לפי ק.ש.ב. והטענות שהוכחנו:

$$2^{\aleph_0} \leq 10^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_0} \Longrightarrow 2^{\aleph_0} = 10^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0}$$

ומכיוון ש: $\aleph = 10^{\aleph_0}$, גם: $\aleph = 2^{\aleph_0}$. תכלס, אם $0 < \kappa \leq \aleph_0$ אז: $\aleph = \kappa^{\aleph_0}$.

<u>חוקי חזקות:</u>

תהיינה $\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3$ עוצמות. מתקיים:

1. $(\kappa_1 \cdot \kappa_2)^{\kappa_3} = \kappa_1^{\kappa_3} \cdot \kappa_2^{\kappa_3}$.
2. $\kappa_1^{\kappa_2} \cdot \kappa_1^{\kappa_3} = \kappa_1^{\kappa_2+\kappa_3}$.
3. $(\kappa_1^{\kappa_2})^{\kappa_3} = \kappa_1^{\kappa_2 \cdot \kappa_3}$.

<u>הוכחה:</u>

נשים לב שחזקה היא לא קיבוצית, כלומר: $\left(a^b\right)^c, a^{(b^c)}$ לא בהכרח שווים.

תהיינה A,B,C קבוצות עבורן: $|A| = \kappa_1, |B| = \kappa_2, |C| = \kappa_3$, זרות (בפועל, רק לסעיף 2 חשוב ש-B,C זרות). מה צריך להוכיח בכך סעיף?

1. צריך למצוא $F : (A \times B)^C \to A^C \times B^C$ חח"ע ועל.
2. צריך למצוא $F : A^B \times A^C \to A^{B\cup C}$ חח"ע ועל.
3. צריך למצוא $F : \left(A^B\right)^C \to A^{B\times C}$ חח"ע ועל.

איך נגדיר את הפונקציה F בכל סעיף?

1. נגדיר $F:A^C\times B^C\to(A\times B)^C$ באופן הבא: $F(f,g)=f\times g$, כאשר: $(f\times g)(c)=(f(c),g(c))$.
2. נגדיר: $F:A^B\times A^C\to A^{B\cup C}$ באופן הבא:

$$F(f,g)(x)=\begin{cases} f(x) & x\in B\\ g(x) & x\in C\end{cases}$$

3. בהצלחה.

<u>אריתמטיקה של עוצמות – תכלס:</u>

אנחנו רוצים לדעת לחבר, לכפול ולהעלות בחזקה עוצמות "בשלוף", כמו שאנחנו עושים במקרה הסופי, בלי לבחור קבוצות ולהגדיר פונקציות...

<u>עקרון הסכום:</u>

תהיינה κ,λ עוצמות, לפחות אחת מהן אינסופית. אזי:

$$\kappa+\lambda=\max\{\kappa,\lambda\}$$

למשל:

$$\aleph_0+\aleph=\aleph,\qquad 2^{\aleph_0}+2^{2^{2^{\aleph_0}}}=2^{2^{2^{\aleph_0}}},\qquad \aleph+\aleph=\aleph$$

<u>עקרון המכפלה:</u>

תהיינה κ,λ עוצמות, לפחות אחת מהן אינסופית, וגדולות מ־0. אזי:

$$\kappa\cdot\lambda=\max\{\kappa,\lambda\}$$

למשל:

$$\aleph\cdot\aleph=\aleph,\qquad 2^{\aleph_0}\cdot 2^{2^{2^{\aleph_0}}}=2^{2^{2^{\aleph_0}}},\qquad \aleph_0\cdot\aleph=\aleph$$

הדגשנו שאין חיסור של עוצמות ואין חילוק של עוצמות. למשל, אסור לרשום: $|\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}| = \aleph - \aleph_0 = \aleph$.

מה כן אפשר לרשום?

$$\aleph = |\mathbb{R}| = |\mathbb{Q}\cup(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})| = |\mathbb{Q}| + |\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}| = \aleph_0 + |\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}|$$

כעת, לפי עקרון הסכום: $\aleph = \max\{\aleph_0, |\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}|\}$. אנו יודעים ש: $\aleph_0 < \aleph$, ולכן בהכרח: $|\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}| = \aleph$.

כמו כן, ראינו ש: $|\mathbb{R}\times\mathbb{R}| = |\mathbb{C}|$, ולכן: $|\mathbb{C}| = \aleph\cdot\aleph = \max\{\aleph,\aleph\} = \aleph$.

מה עם חזקה? האם אפשר לומר "בשלוף" למה שווה: κ^λ, כשלפחות אחת מהן אינסופית? ראשית, נניח ש: $2 \le \kappa, \lambda$. שנית, הכלל שננסח עכשיו נכון רק לעוצמות מהצורה: $\aleph_0, 2^{\aleph_0}, 2^{2^{\aleph_0}}, \ldots$ (כלומר, $\aleph_n$ כאשר n שלם אי־שלילי).
אם כן:

$$\kappa^\lambda = \begin{cases} \kappa & \kappa > \lambda \\ 2^\lambda & \kappa \le \lambda \end{cases}$$

למשל:

$$\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}, \quad \aleph^{\aleph_0} = \aleph$$

וכמו כן: $|\mathbb{R}^n| = \aleph^n = \aleph$.

השוואת עוצמות:

אם $x,y \in \mathbb{R}$ ברור לנו שאחד מהם גדול מהשני, כלומר: $x \leq y$ או $y \leq x$.
יחס הסדר "קטן־שווה" על ממשיים הוא מלא.

זה נכון גם לעוצמות – לכל κ, λ עוצמות, $\lambda \leq \kappa$ או $\kappa \leq \lambda$; זה לא מובן מאליו – אנחנו צריכים לקחת שתי קבוצות A, B עבורן: $|A| = \kappa, |B| = \lambda$ ולהראות שקיימת $f: A \to B$ חח"ע או $g: B \to A$ חח"ע.