טופולוגיה תיכוניסטים תשפ"א- בוחן

מרצים: פרופסור מיכאל מגרל, ד"ר אייל סובג.
מתרגלים: תמר בר-און, גלעד פורת קורן, מתן קומיסרצ'יק
עליכם לענות על כל השאלות.

1. נזכיר כי $l_\infty = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sup|x_n| < \infty\}$. זהו מרחב נורמי עם נורמת אינסוף: $||(x_n)|| = \sup|x_n|$

   (א) (20 נקודות) נגדיר $D = \{(x_i) \in l_\infty : \forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq x_{n+1}\}$, מרחב הסדרות המונוטוניות יורדות חלש. הוכיחו כי D סגורה. (הערה: ניקוד חלקי יינתן למי שיפתור עבור הקבוצה הבאה: $C = \{(x_n) \in l_\infty : x_1 \geq x_2\}$)

   (ב) (20 נקודות) נגדיר $E = \{(x_i) \in l_\infty : \forall n \in \mathbb{N}, x_n > x_{n+1}\}$, מרחב הסדרות המונוטוניות יורדות חזק. הוכיחו כי E אינה סגורה.

i. עבור n מסויים נסתכל על הפונקציה $f : l_\infty \to \mathbb{R}$ שמוגדרת ע"י $f_n(x_i) = x_i - x_{i+1}$. היא רציפה כי כל הטלה רציפה, והפרש של פונקציות רציפות לממשיים הוא רציף. לכן $f_n^{-1}[0,\infty)$ סגור. וD שווה בדיוק ל$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}[0,\infty)$ סגור כחיתוך של סגורות.
דרך נוספת: נוכיח סגירות לגבולות. תהי $(x_n^m) \to (x_n)$. אז יש התכנסות רכיב-רכיב (הוכחנו בתרגול). כלומר, לכל n, $x_n^m \to x_n$. נסתכל על n מסויים. מתקיים שלכל m, $x_n^m \geq x_{n+1}^m$, ולכן זה קורה גם בגבול, כלומר $x_n \geq x_{n+1}$.

ii. נסתכל על הסדרה הקבועה על 0. היא לא שייכת לE. לכל ϵ נבחר m כך ש$\frac{1}{m} < \epsilon$, ונקח את הסדרה $(\frac{1}{n})_{n\geq m}$. הסדרה הזאת שייכת לE ומרחקה מסדרת ה0 קטן מϵ. כלומר, כל כדור סביב 0 נחתך עם E. קיבלנו שE^c אינה פתוחה, ולכן E אינה סגורה.

2. (30 נקודות)

   (א) (5 נקודות) הגדירו: פונקציית ליפשיץ.

   (ב) (25 נקודות) תזכורת: הטופולוגיה הp- אדית על $\mathbb{Z}$ מוגדרת כך:

$$d_p(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \dfrac{1}{p^{k(x,y)}} & x \neq y \end{cases}$$

כאשר $k(x,y) = \max\{i : p^i \mid x-y\}$.
קבעו האם הפונקציה $f : (\mathbb{Z}, d_p) \to (\mathbb{Z}, d_p)$ שמוגדרת ע"י $f(x) = x^2$ היא

פונקציית ליפשיץ.

א. פונקציה $f\ :\ (X,\tau)\ \to\ (Y,\rho)$ נקראת ליפשיץ אם קיים k חיובי כך שלכל $x,y\in X$

$$\rho(f(x),f(y))\leq d(x,y)$$

ב. נשים לב ש$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ ולכן $k(x^2,y^2)=k(x,y)\cdot t$ כאשר t היא החזקה המקסימלית של p שמחלקת את $x+y$.

$$d_p(f(x),f(y))=d_p(x^2,y^2)=\frac{1}{p^{k(x^2,y^2)}}=\frac{1}{p^{k(x,y)}}\cdot\frac{1}{p^t}=\frac{1}{p^t}d_p(x,y)\leq d_p(x,y)$$

כי $\frac{1}{p^t}\leq 1$.

3. (30 נקודות)

(א) (5 נקודות) הגדירו : מרחב קשיר.

(ב) (25 נקודות) נסתכל על $\mathbb{Z}$ עם הטופולוגיה של פורטסנברג שמוגדרת כך שהקבוצה

$$\{a\mathbb{Z}+b : a,b\in\mathbb{Z}, a\neq 0\}$$

מהווה בסיס. כלומר, הקבוצות הפתוחות הן איחודים של קבוצות מהצורה

$$a\mathbb{Z}+b$$

כאשר $a\neq 0$. הוכיחו שהמרחב בלתי קשיר לחלוטין. כלומר, שרכיבי הקשירות הם הנקודונים.

א. מרחב X נקרא קשיר אם לא קיימות קבוצות פתוחות לא ריקות וזרות U,V כך ש$X=U\cup V$.

ב. נשים לב שכל הקבוצות בבסיס סגורות, כי

$$(a+b\mathbb{Z})^c=\bigcup_{i=1}^{b-1}a+i+b\mathbb{Z}$$

לכן המרחב לא קשיר.

רכיבי הקשירות הם הנקודונים. נוכיח שכל קבוצה A עם לפחות שני איברים אינה קשירה. נניח $a_1<a_2\in A$. אם בה"כ $|a_1|<|a_2|$ נקח את הקבוצה הפתוחה $0+a_2\mathbb{Z}$. החיתוך שלה עם A הוא קבוצה סגוחה לא טריוויאלית.

אחרת $|a_1|=|a_2|$ ואז ניקח את הקבוצה הפתוחה $1+a_2\mathbb{Z}$. החיתוך שלה עם A הוא קבוצה סגוחה לא טריוויאלית.