תרגיל בית 3 - אינפי 3

2 בדצמבר 2016

שאלה 1

האם הקבוצות הבאות הן פתוחות? סגורות? חסומות?

א) $A = \{(x,y)\,|y=0, x \in (0,1)\}$ ב-$\mathbb{R}^2$.

פתרון:

הקבוצה אינה פתוח, מכיוון שעבור $\left(\frac{1}{2},0\right) \in A$ לכל $r>0$ מתקיים $B\left(\left(\frac{1}{2},0\right),r\right) \nsubseteq A$.
הקבוצה אינה סגורה, כי $\left\{\left(\frac{1}{n},0\right)\right\} \subseteq A$ אך $lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n},0\right) = (0,0) \notin A$. קבוצה חסומה, למשל הכדור $B\left(\left(\frac{1}{2},0\right),2\right)$ מכיל אותה.

ב) $B = \{(x,y)\,|x=y\}$ ב-$\mathbb{R}^2$.

פתרון:

הקבוצה אינה פתוחה, כי עבור $(1,1) \in B$ לכל $r>0$ מתקיים $B((1,1),r) \subseteq B$
הקבוצה סגורה, מכיוון שהמשלים פתוחה. לכל נק' $(x,y) \in B^c$ נסמן את מרחקה מהישר $x=y$ ב-D ואז $B\left((x,y),\frac{D}{2}\right) \subseteq B^c$. הקבוצה אינה חסומה כי לכל $r>0$, הנקודה $(3r,3r)$ נמצאת בקבוצה אם היא לא נמצאת בכדור $B((0,0),r)$.

ג) $C = \{(x,y)\,|x>0, y<0, x+y>-1\}$ ב-$\mathbb{R}^2$.

פתרון:

הקבוצה פתוחה, כי לכל $(x,y) \in C$, נסמן את מרחקה מהישר $x+y+1=0$ ב-D ונסמן $r=\frac{1}{2}min\{|x|,|y|,D\}$ ונקבל ש-$B((x,y),r) \subseteq C$. הקבוצה לא סגורה, כי המשלים אינה פתוחה משום שעבור $(0,0) \in C^c$, לכל $r>0$, $B((0,0),r) \subsetneq C^c$ ולכן אינה פתוחה. הקבוצה אינה חסומה, כי לכל $r>0$, הנקודה $(1+10r,-1-10r)$ נמצאת בקבוצה, אך לא נמצאת בכדור $B((-1,1),r)$.

שאלה 2

תהי $X \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה קומפקטית, ויהי $\{A_i\}_{i\in I}$ אוסף של קבוצות סגורות שאיחודן הוא X. נניח שלכל אוסף סופי $\{A_{ik}\}_{k=1}^{m}$ מתקיים: $\cap_{i=1}^{m} A_{ik} \neq \emptyset$. הוכיחו $\cap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$.

פתרון:

נניח בשלילה שהחיתוך אינו ריק, לכן : $\mathbb{R}^n = \emptyset^c = (\cap_{i\in I} A_i)^c = \cup_{i\in I} A_i^c$, לפי דה מורגן, ולכן $X \subseteq \cup_{i\in I} A_i^c$ פתוחות (כי משלימות שלהן סגורות) ולכן קיים תת כיסוי סופי של X: $X \subseteq \cup_{k=1}^{s} A_{ik}^c$.

מצד שני, $X \subseteq \cap A_{ik} \neq \emptyset$ כי חותוך הוא סופי, כלומר קיים $x \in \cap A_{ik}$ אלא שאז $x \in X$ ולכן גם $x \in \cup A_{ik}^c = (\cap A_{ik})^c$ וזו סתירה. לכן החיתוך אינו ריק.

שאלה 3

יהי $(\mathbb{R}^n, d)$ מרחב אוקלידי, ותיינה $A, B \subset \mathbb{R}^n$. הוכיחו או הפריכו:

א) $\overline{A\cap B} \supseteq \bar{A} \cap \bar{B}$

פתרון:

נפריך: נתבונן בקבוצות $A = (0,1)$ ו־$B = (1,3)$ ב־$\mathbb{R}$. מכיוון ש־החיתוך ריק, גם $\overline{A\cap B} = \emptyset$. מאידך גיסא $\overline{A} = [0,1]$, $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$, $\overline{B} = [1,3]$, ולכן $\overline{A} \cap \overline{B} \nsubseteq \overline{A\cap B}$.

ב) $int\,(A\cup B) \supseteq int\,(A) \cup int\,(B)$

פתרון:

נוכיח ש־$int\,(B) \subseteq B \subseteq A\cup B$ וגם $int\,(A) \subseteq A \subseteq A\cup B$. מכיוון שהקבוצות $int\,(A)$, $int\,(B)$ פתוחות גם $int\,(A) \cup int\,(B)$פתוחה ומכיוון שהיא מוכלת ב $A\cup B$ והפנים היא קבוצה פתוחה המקסימלית שמוכלת, נקבל

$int\,(A\cup B) \supseteq int\,(A) \cup int\,(B)$.

שאלה 4

תהי $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה חסומה ב־$\mathbb{R}^n$. נניח שהסדרה $\{d\,(x_n, 0)\}_{n\in\mathbb{N}}$(המטריקה האוקלידית) עולה ממש. האם $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת?

פתרון:

לאו דווקא. נתבונן בסדרה $x_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ ב־$\mathbb{R}$, $|x_1| < 1$ ולכן חסומה. $d_2\,(x_n, 0) = |x_n| = 1 - \frac{1}{n}$ עולה ממש אך הסדרה לא מתכנסת.

שאלה 5

ענה על הסעיפים הבאים:

א) יהי $\mathbb{R}^n$ מרחב אוקלידי, ותהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$. האם $\overline{A} = \overline{int\,(A)}$?

פתרון:

לא. נתבונן בקבוצה $\mathbb{Q}$ ב־$\mathbb{R}$. מצד אחד $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. ומצד שני: $\overline{int\,(\mathbb{Q})} = \overline{\emptyset} = \emptyset$.

ב) תהי $\{x\}_n \subset \mathbb{R}^n$ סדרת קושי. הוכיחו שאם לסדרה יש גבול חלקי (גבול של תת סדרה) אזי זהו הגבול של הסדרה.

פתרון:

נניח שקיימת סדרת מספרים $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ ששואפת לאינסוף ו־$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת ל־x. לכל $\epsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $m, n > n_0$ מתקיים: $d\,(x_n, x_m) \leq \epsilon$. כמו כן, קיים k עבורו $n_k > n_0$ ו־$d\,(x_{n_k}, x) \leq \epsilon$, מהתכנסות תת סדרה. לכן לכל $n > n_0$ $d\,(x_n, x) \leq d\,(x_n, x_{n_k}) + d\,(x_{n_k}, x) < 2\epsilon$. ולכן $\{x_n\}$ מתכנסת ל־x.