נכתב על ידי יהונתן רגב

**<u>גבולות שמעורב בהם $\infty$</u>**

**הגדרה**

**סביבה מנוקבת** של $\infty$ היא קבוצה מהצורה $(c,\infty)$, עבור $c\in\mathbb{R}$.

**סביבה מנוקבת** של $-\infty$ היא קבוצה מהצורה $(-\infty,c)$, עבור $c\in\mathbb{R}$.

**הערה**

סביבה מנוקבת של $\pm\infty$ = סביבה של $\pm\infty$.

**הגדרה**

תהי $-\infty\le a\le\infty$. $a$ **נקודת הצטברות** של תחום הפונקציה $f$ אם בכל סביבה מנוקבת של $a$ יש נקודה מתחום הפונקציה.

**למשל** $\infty$ היא נקודת הצטברות של תחום הפונקציה $\Leftrightarrow$ לכל $c\in\mathbb{R}$ יש בתחום הפונקציה נקודה $c<x$ $\big(x\in(c,\infty)\big)$ $\Leftrightarrow$ יש בתחום הפונקציה סידרה $x_n\to\infty$.

**הגדרה**

יהיו $-\infty\le a,b\le\infty$.

$\boldsymbol{\lim_{x\to a} f(x)=b}$ אם:

א. $a$ נקודת הצטברות של $dom(f)$.
ב. לכל סביבה $V$ של $b$, יש סביבה מנוקבת $U$ של $a$ כך שלכל $x\in U$ בתחום, $f(x)\in V$.

**דוגמה**

1. $a,b\in\mathbb{R}$.

ב. לכל קבוצה מהצורה $(b-\epsilon,b+\epsilon)$ $(\epsilon>0)$, קיימת קבוצה מהצורה:

$(a-\delta,a+\delta)/\{a\}$, כך ש - $f(x)\in(b-\epsilon,b+\epsilon)$ לכל $x\in(a-\delta,a+\delta)/\{a\}$ בתחום.

$(\lim_{x\to a} f(x)=b)$.

2. $a=b=\infty$.

ב. לכל קבוצה מהצורה $(c,\infty)$, קיימת קבוצה מהצורה $(d,\infty)$ כך שלכל $f(x)\in(c,\infty)$ לכל $x\in(d,\infty)$ בתחום.

כלומר, לכל $c$ קיים $d$ כך ש: $f(x)>c$ לכל $x>d$ בתחום.

$(lim_{x\to\infty} f(x)=\infty)$.

**תרגיל:** השלם את שבעת המקרים הנותרים!

**משפט**

יהיו $-\infty\le a,b\le\infty$.

$\lim_{x\to a} f(x)=b \Leftrightarrow a$ נקודת הצטברות של $dom(f)$ ולכל סידרה $a\ne a_n\to a$ בתחום מתקיים $f(a_n)\to b$.

**הוכחה**

זו הכללה של הניסוח של היינה עובר $-\infty<a,b<\infty$.

נוכיח עבור המקרה ש - $-\infty<a<\infty \wedge b=\infty$.

$\boxed{\Leftarrow}$

נניח $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$.

מההגדרה, $a$ נקודת הצטברות של $dom(f)$.

תהי $a\ne a_n\to a$. צ"ל: $f(a_n)\to\infty$.

מהנתון, לכל $c$ קיים $\delta>0$ כך ש - $f(x)>c$ לכל $x$ בתחום כך ש - $0<|x-a|<\delta$.

יהי נתון $c$. ניקח $\delta$ כנ"ל. $a\ne a_n\to a$, לכן קיים $N$ כך שלכל $n\ge N$, $0<|a_n-a|<\delta$.

מהפסקה הקודמת, $f(a_n)>c$ לכל $n\ge N$

$\boxed{\Rightarrow}$

נניח שלא מתקיים $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$.

כלומר, קיים $c$ כך שלכל $\delta > 0$ קיים $a \neq x \in (a-\delta, a+\delta)$ בתחום שעבורו $f(x) \leq c$.

לכן, לכל $n$ (עבור $\delta = \frac{1}{n}$) קיים $a \neq a_n \in \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)$ כך ש - $f(a_n) \leq c$. $a_n \to a$ עפ״י למת הסנדוויץ׳, אבל: $f(a_n) \nrightarrow \infty$.

■

**דוגמה**

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

**הוכחה**

<u>לפי המשפט</u>: תהי $0 \neq a_n \to 0$ סידרה ($0 \neq$ לכן בתחום).

$0 < a_n^2 \to 0$, לכן $\frac{1}{a_n^2} \to \infty$.

**תרגיל**: הוכח ישירות לפי ההגדרה!

**הגדרה**

תהי $a \in \mathbb{R}$.

$a$ **נקודת הצטברות מימין** של תחום הפונקציה אם לכל $\delta > 0$, קיים $x \in (a, a+\delta)$.

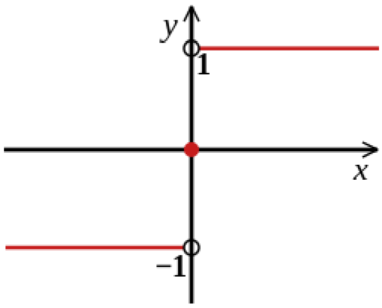
$a$ **נקודת הצטברות משמאל** של תחום הפונקציה אם לכל $\delta > 0$, קיים $x \in (a-\delta, a)$.

$\boldsymbol{\lim_{x\to a^+} f(x) = b}$, אם $a$ נקודת הצטברות מימין של התחום, ולכל סביבה $V$ של $b$, קיים $\delta > 0$ כך ש - $f(x) \in V$ לכל $x$ בתחום כך ש - $a < x < a + \delta$.

$\boldsymbol{\lim_{x\to a^-} f(x) = b}$, אם $a$ נקודת הצטברות משמאל של התחום, ולכל סביבה $V$ של $b$, קיים $\delta > 0$ כך ש - $f(x) \in V$ לכל $x$ בתחום כך ש - $a - \delta < x < a$.

**דוגמה (פונקציית הסימן)**

$$f(x)=\begin{cases}-1, x<0\\ 0, x=0\\ 1, x>0\end{cases}$$




$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=-1<f(0)=0<1=\lim_{x\to 0^+} f(x)$$

**משפט**

$\lim_{x\to a^+} f(x)=b \Leftrightarrow a$ נקודת הצטברות מימין של התחום, ולכל סידרה $a<a_n\to a$ (יורדת ממש) $f(a_n)=b$.

בדומה עבור $\lim_{x\to a^-} f(x)=b$.

**הוכחה**

נראה כי $\boxed{\Longrightarrow}$ מתקיים גם כשעובדים עם סדרות יורדות ממש $a_n\to a$.

נניח שלא מתקיים: $\lim_{x\to a^+} f(x)=b$.

תהי $V$ סביבה של $b$ כך שלכל $0<\delta$, קיים בתחום $a<x<a+\delta$, עבורו $f(x)\notin V$.

באינדוקציה על $n$:

<u>$n=1$</u>: ניקח בתחום $a<a_1<a+1$ עבורו $f(a_1)\notin V$.

<u>$n+1$</u>: $a<a_n$. ניקח: $\delta=\min\left\{a_n-a,\frac{1}{n+1}\right\}$, וניקח: $a<a_{n+1}<a+\delta$ בתחום, עבורו: $f(a_{n+1})\notin V$.

מהבנייה, $a < a_n < a + \delta$ לכל $n$, לכן: $a_n \to a$. $a_{n+1} < a + (a_n - a) = a_n$, לכן הסדרה יורדת ממש.

לכל $n$, $f(a_n) \notin V$, בסתירה לכך ש - $f(a_n) \to b$.

הכיוון $\boxed{\Leftarrow}$ בדומה להוכחות הקודמות.

■

**למה**

עבור $a \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ קיים $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ (קיימים ושווים). במקרה זה, כל הגבולות שווים.

**הוכחה**

$\boxed{\Leftarrow}$

מיידי מההגדרות.

$\boxed{\Rightarrow}$

(בקצרה) אם $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b$, אז:

1. קיים $\delta_1 > 0$ עבור $a^+$.
2. קיים $\delta_2 > 0$ עבור $a^-$.

ניקח $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, בשביל הגדרת $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

■