נכתב על ידי יהונתן רגב

תזכורת

f רציפה במידה שווה בתחום $A \subseteq dom\ f$ אם: לכל $\epsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כך ש - $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ לכל $x_1, x_2 \in A$ כך ש - $|x_1 - x_2| < \delta$.

הערה

אם f רציפה במידה שווה בתחום A, אזי לכל $a \in A$, כך שקיימת סביבה של a המוכלת ב - A, f רציפה בנקודה a.

הוכחה

ניקח $x_2 = a$ בהגדרת רציפות במידה שווה.

דוגמה

$\frac{1}{x}$ אינה רציפה במידה שווה בתחום $(0,1)$.

נסדר ש - $\left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \geq 1$, עבור $x_1 < x_2$, כך ש - $|x_1 - x_2| < \delta$ (לכל $0 < \delta$, נמצא כאלה).

נקבע $0 < x_2 < \delta$, ונמצא את x_1.

$$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \geq 1$$

$$\frac{1}{x_1} \geq 1 + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + 1}{x_2}$$

$$x_1 = \frac{x_2}{x_2 + 1} < \frac{x_2}{1} \wedge 0 < x_1 < x_2 < \delta$$

הערה

f רציפה במידה שווה בתחום A $\Leftrightarrow$ לכל זוג סדרות $x_n, y_n \in A$, כך ש - $x_n - y_n \to 0$, מתקיים: $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.

הוכחה

$\boxed{\Leftarrow}$

יהי $0 < \epsilon$.

מהנתון, קיים $0 < \delta$, כבהגדרת הרציפות במידה שווה של f.

נכתב על ידי יהונתן רגב

$x_n - y_n \to 0$, לכן $|x_n - y_n| \to 0$. ולכן קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$, מתקיים: $|x_n - y_n| < \delta$. מהנתון, לכל $N < n$, $|f(x_n) - f(y_n)| < \epsilon$, לכן: $|f(x_n) - f(y_n)| \to 0$, לכן: $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.

$\boxed{\Rightarrow}$

נניח בשלילה ש – f אינה רציפה במידה שווה ב - A, ז"א: קיים $\epsilon > 0$, כך שכל $\delta > 0$ לא יתאים להגדרה.

בפרט, לכל $n \in \mathbb{N}$, עבור $\delta = \frac{1}{n}$ קיימים $x_n, y_n \in A$ כך ש - $0 \leftarrow 0 \le |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \to 0$, אך: $|f(x_n) - f(y_n)| \ge \epsilon$.

לכן: $x_n - y_n \to 0$, אך: $f(x_n) - f(y_n) \nrightarrow 0$.

■

משפט (קנטור)

פונקציה רציפה בקטע סגור, רציפה במידה שווה שם.

הוכחה

נניח ש – f רציפה בקטע הסגור $[a, b]$ אך אינה רציפה במידה שווה שם.

עפ"י ההערה קיימות סדרות $a \le x_n, y_n \le b$, כך ש - $x_n - y_n \to 0$, אך $f(x_n) - f(y_n) \nrightarrow 0$.

יהי $\epsilon > 0$, כך ש - $|f(x_n) - f(y_n)| \ge \epsilon$ עבור אינסוף ערכי n.

ע"י מעבר לתת הסדרות הנקבעות ע"י ערכי n אלה, ניתן להניח $|f(x_n) - f(y_n)| \ge \epsilon$ לכל n.

x_n חסומה, לכן עפ"י משפט בולצאנו ויירשטס קיימת לה תת סדרה מתכנסת $x_{m_n} \to c$.

מתקיים: $a \le \overbrace{x_{m_n}}^{\to c} \le b$, לכן: $a \le c \le b$.

f רציפה ב - $[a, b]$ ו - $c \in [a, b] \wedge x_{m_n}$, לכן: $f\left(x_{m_n}\right) \to f(c)$.

$x_{m_n} - y_{m_n} \to 0$ (כתת סדרה של $x_n - y_n$), לכן $y_{m_n} \to c$ (אריתמטיקה של גבולות), ומרציפות f בקטע $[a, b]$: $f\left(y_{m_n}\right) \to f(c)$, ומכאן: $\left|f\left(x_{m_n}\right) - f\left(y_{m_n}\right)\right| \to 0$. בסתירה. ■

נכתב על ידי יהונתן רגב

משפט

פונקציה רציפה ומחזורית ב - $\mathbb{R}$, רציפה במידה שווה ב - $\mathbb{R}$.

[f מחזורית אם קיים $c \in \mathbb{R}$ כך ש - $f(x) = f(x+c)$ לכל x. דוגמה: $sin(x)$ מחזורית. בפרט, $sin(x)$ רציפה במידה שווה ב - $\mathbb{R}$]

הוכחה

יהי c המחזור של f.

f רציפה ב - $[0,2\cdot c]$, וזהו קטע סגור, לכן f רציפה במידה שווה שם.

יהי $\epsilon > 0$. ניקח $\delta > 0$ כך ש - $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ לכל $0 \leq x_1, x_2 \leq 2\cdot c$, כך ש - $|x_1 - x_2| < \delta$.

נראה ש – δ זה מתאים להגדרת הרציפות במידה שווה עבור כל $\mathbb{R}$.

יהיו $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ כך ש - $|x_1 - x_2| < \delta$.

$|x_1 - x_2| < c$, לכן קיים $k \in \mathbb{Z}$ כך ש – $0 \leq x_1 + k\cdot c, x_2 + k\cdot c \leq 2\cdot c$ (**תרגיל:** הוכיחו!).

$$|f(x_1) - f(x_2)| \overset{\text{מחזוריות}}{=} \left| f(\overbrace{x_1 + k\cdot c}^{\in[0,2\cdot c]}) - f(\overbrace{x_2 + k\cdot c}^{\in[0,2\cdot c]}) \right| < \epsilon$$

הגדרה

פונקציה f היא **עולה ממש** אם לכל $x_1 < x_2$ בתחום, מתקיים: $f(x_1) < f(x_2)$.

הערה

1. פונקציה עולה ממש היא פונקציה חד - חד ערכית.
2. הפונקציה ההפוכה לפונקציה עולה ממש היא פונקציה עולה ממש.

הוכחה

2. יהיו $x_1 < x_2$. נסמן: $f(x_1) = y_1 \wedge f(x_2) = y_2$. f עולה ממש לכן: $y_1 < y_2$.

אם $x_1 = f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) = x_2$, אזי $x_1 \geq x_2$, בסתירה.

הערה

אם f עולה ממש ורציפה בקטע הסגור $[a,b]$, אזי $Img(f)=[f(a),f(b)]$, ואז f^{-1} מוגדרת על קטע סגור.

למה

אם f עולה ממש ורציפה בקטע הסגור $[a,b]$, אזי f^{-1} עולה ממש ורציפה בקטע הסגור $[f(a),f(b)]$.

הוכחה

נותר להוכיח רציפות. נראה למשל רציפות משמאל.

נניח $y_n \nearrow y$ בקטע $[f(a),f(b)]$.

צ"ל: $f^{-1}(y_n)\to f^{-1}(y)$.

f^{-1} עולה וחסומה, לכן קיים לה גבול $f^{-1}(y_n)\nearrow c$.

$f^{-1}(y_n)<f^{-1}(y)$, שכן $y_n<y$, לכן: $c\le f^{-1}(y)$.

$f^{-1}(y_n)\to c$ ו f – רציפה, לכן $y \leftarrow y_n=f\left(f^{-1}(y_n)\right)\to f(c)$, לכן: $f(c)=y$, כלומר: $c=f^{-1}(y)$.

הערה

אותה למה, עבור פונקציות עולות ממש ורציפות על קבוצה שהיא איחוד של קטעים סגורים.

למשל: $\mathbb{R},(0,1),(0,\infty),\cdots$.

הערה

הפונקציה $f(x)=e^x$ מוגדרת לכל $0<x$.

מעצם בניית חזקות מהצורה a^x, הפונקציה a^x רציפה לכל $0<a$ (מניסוח רציפות בלשון הסדרות).

$1<e$, לכן e^x עולה ממש.

לכן, קיימת לה פונקציה הפוכה, רציפה ועולה ממש, נקרא לה $log(x)$ (יש קוראים $ln(x)$).

$$dom(\log(x))=Img(e^x)=(0,\infty)\blacksquare$$