דוגמה – הגדרת פונקציה רציפה אך לא גזירה

בהמשך לשיעור הקודם:

המטרה: להגדיר פונקציה $f(x)$ שהיא רציפה בכצ $x_0 \in \mathbb{R}$ אך אינה גזירה בשום $x_0 \in \mathbb{R}$.

לדוגמה פונקציית הערך המוחלט רציפה בכל נקודה אך אינה גזירה בנקודה 0.

$$u_0(x) = \left\{\begin{array}{c} x \text{ המרחק בין} \\ \text{לבין המספר השלם} \\ \text{הכי קרוב} \end{array}\right\}$$

$$u_k(x) = \frac{1}{4^k} u_0(4^k x)$$

<u>אבחנה</u>: כל הפונקציות $u_k(x)$ הן לינאריות בקטעים, עם שיפוע ± 1.

<u>טענה</u>: הטור $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ מתכנס במידה שווה בכל $\mathbb{R}$.

<u>הוכחה</u>: לכל $x \in \mathbb{R}$ ולכל $k \geq 0$,

$$|u_0(x)| \leq \frac{1}{2}$$

לכן,

$$|u_k(x)| = \frac{1}{4^k} |u_0(4^k x)| \leq \frac{1}{2 \cdot 4^k}$$

הטור

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 4^k}$$

מתכנס (טור הנדסי)

לכן

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$$

מתכנס במידה שווה לפי מבחן ווירשטראס.

<u>טענה</u>: $f(x)$ רציפה בכל $x_0 \in \mathbb{R}$.

<u>הוכחה</u>: הפונקציות $u_k(x)$ רציפות בכל $x_0 \in \mathbb{R}$, והטור $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ מתכנס במידה שווה לכן הסכום $f(x)$ רציפה בכל $x_0 \in \mathbb{R}$.

<u>טענה</u>: $f(x)$ לא גזירה בשום $x_0 \in \mathbb{R}$.

<u>הוכחה</u>: נניח בשלילה כי $f(x)$ גזירה בנקודה x_0 אזי קיים הגבול

$$L = f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

לכל k, הפונקציה $u_k(x)$ לינארית בקטעים מן הצורה $a \in \mathbb{Z}$, $\left[a \cdot \frac{1}{2 \cdot 4^k}, (a+1) \cdot \frac{1}{2 \cdot 4^k}\right]$.

יהי $a_k \in \mathbb{Z}$ כך ש - x_0 שייך לקטע הנ"ל. לקטע הזה יש אורך $\frac{1}{2\cdot 4^k}$ לכן קיימת נקודה y_k ששייכת לקטע הזה כך ש - $|x_0 - y_k| = \frac{1}{4^{k+1}}$.

מה שחשוב על ה - y_k – ים האלה:

1. $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = x_0$
2. בקטע בין y_k ל - x_0 הפונקציה $u_k(x)$ לינארית עם שיפוע ± 1

קל וחומר. הפונקציות $u_0(x), u_1(x), \cdots, u_{k-1}(x)$ גם לינאריות בקטע הזה.
לפי הגדרת הגבול לפי היינה:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f(y_k)-f(x_0)}{y_k-x_0}$$

הסבר לכך:

$$z(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

אם $L=\lim\limits_{x\to x_0} z(x)$, $y_k \to x_0$, $y_k \neq x_0$ אזי $z(y_k)\to L$.

אבל, לכל $m \geq 0$,

$$\frac{f(y_m)-f(x_0)}{y_m-x_0}=\frac{\sum_{k=0}^{\infty}u_k(y_m)-\sum_{k=0}^{\infty}u_k(x_0)}{y_m-x_0}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u_k(y_m)-u_k(x_0)}{y_m-x_0}$$

נשים לב כי $|y_m - x_0| = \frac{1}{4^{m+1}}$. אבל, $u_k(x)$ הינה פונקציה בעלת מחזור $\frac{1}{4^k}$ אם $k \geq m+1$, אזי $u_k(y_m) = u_k(x_0)$ כי המרחק בין x_0, y_m מתחלק במחזור של $u_k(x)$.

לכן אם $k \geq m+1$ אזי $\frac{u_k(y_m)-u_k(x_0)}{y_m-x_0} = 0$. לכן,

$$\frac{f(y_m)-f(x_0)}{y_m-x_0}=\sum_{k=0}^{m}\frac{u_k(y_m)-u_k(x_0)}{y_m-x_0}$$

אבל הפונקציות $u_0(x), \cdots u_m(x)$ כולן לינאריות בקטע בין y_m, x_0.

לכן, $\frac{u_k(y_m)-u_k(x_0)}{y_m-x_0}$ הינו השיפוע של $u_k(x)$ בקטע הזה. כלומר ± 1.

לכן, $\frac{f(y_m)-f(x_0)}{y_m-x_0}$ הינו מספר שלם לכל m.

יותר מזה, $\frac{f(y_m)-f(x_0)}{y_m-x_0}$ הינו זוגי אם m זוגי. אי זוגי אם m זוגי.

לכן, הסדרה: $\left\{\frac{f(y_m)-f(x_0)}{y_m-x_0}\right\}$

לא יכולה להתכנס, בסתירה ל - $L = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{f(y_k)-f(x_0)}{y_k-x_0}$.

טורי חזקות

טור חזקות הינו טור מן הצורה

$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ כאשר $u_k(x) = a_k x^k$ כאשר $a_k \in \mathbb{R}$ (זה מקרה פרטי של טור של פונקציות).

נשים לב כי כל טור $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ מתכנס בנקודה $x_0 = 0$ שהרי

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot 0^k = a_0 + 0 + 0 + 0 + \cdots$$

טענה (12.1)

יהי $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ טור חזקות. נניח שהוא מתכנס בנקודה x_0 אזי הוא מתכנס בהחלט ב y – כך ש - $|y| < |x_0|$.

הוכחה

לפי ההנחה, הטור (של מספרים) $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k y^k| = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k \cdot x_0^k| \cdot \left|\frac{y}{x_0}\right|^k$

לכל k, $|a_k x_0^k| \cdot \left|\frac{y}{x_0}\right|^k \le M \cdot \left|\frac{y}{x_0}\right|^k$ אבל $\left|\frac{y}{x_0}\right| < 1$ לכן הטור ההנדסי $\sum_{k=0}^{\infty} M \cdot \left|\frac{y}{x_0}\right|^k$ מתכנס.

לכן, $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k y^k|$ מתכנס לפי מבחן ההשוואה. כלומר, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k$ מתכנס בהחלט.

הגדרה

יהי $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ טור חזקות. רדיוס ההתכנסות של הטור הינו:

$$R = \sup\{|x_0| : \text{הטור מתכנס בנקודה } x_0\}$$

הערה

יתכן כי $R = \infty$

טענה (12.2)

יהי $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ טור חזקות. יהי R רדיוס ההתכנסות שלו. אם $|x_0| < R$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k$ מתכנס בהחלט. אם $|x_0| > R$, אזי $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x_0^k$ מתבדר.

הוכחה

אם $|x_0| < R$ אזי קיימת נקודה $y \in \mathbb{R}$ כך ש - $|x_0| < |y| \le R$ והטור מתכנס ב – y. לפי הטענה הקודמת (עם $y_1 x_0$ בחילוף תפקידים) הטור מתכנס בהחלט ב - x_0.

אם $|x_0| > R$ אזי הטור מתבדר ב - x_0 לפי הגדרת הסופרימום.

זה אומר כי תחום ההתכנסות (הקבוצה של כל הנקודות בהן הטור מתכנס) הינו

$[-R, R]$ או $[-R, R)$ או $(-R, R]$ או $(-R, R)$

דוגמה

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot x^n$$

הטור מתבדר ב – 1, מתכנס ב - -1 לכן $R=1$. תחום ההתכנסות $[-1,1)$.

טענה (12.3)

יהי $\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ טור חזקות. יהי R רדיוס ההתכנסות.

א. אם הגבול $\lim_{k\to\infty}|\frac{a_k}{a_{k+1}}|$ קיים אזי הוא שווה ל – R.

ב. $\frac{1}{R}=\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}$

הוכחה

א. נניח שהגבול $L=\lim_{k\to\infty}|\frac{a_{k+1}}{a_k}|$ קיים. יהי $x_0\in\mathbb{R}$. אם $|x|<\frac{1}{L}$ אזי

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}x_0^{k+1}}{a_kx_0}\right|=|x_0|\cdot\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=x_0\cdot L<1$$

ולכן הטור $\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cdot x_0^k$ מתכנס לפי מבחן דאלמבר. אם $|x_0|>\frac{1}{L}$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cdot x_0^k$ מתבדר לפי דאלאמבר. זה אומר ש - $R=\frac{1}{L}$

ב. אותו דבר עם מבחן קושי.

דוגמה

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}x^n$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{n^2}\right)=1$$

אבל $x_0=1\Leftarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס. $x_0=-1$ מתכנס. תחום ההתכנסות הינו $[-1,1]$

טענה (12.4)

יהי $\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ טור חזקות. יהי R רדיוס ההתכנסות שלו אזי הטור מתכנס במידה שווה בכל קטע מן הצורה $[-r,r]$ כאשר $0<r<R$.

הוכחה

יהי $0 < r < R$. אזי קיים y כך ש - $r < |y| \leq R$ כך שהטור מתכנס ב $y -$. לפי טענה 12.1, זה אומר שהטור מתכנס בהחלט ב - r. כלומר $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k r^k|$ מתכנס. לכל $x \in [-r, r]$ מתקיים $|a_k x^k| \leq |a_k r^k|$. לכן, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ מתכנס במידה שווה בקטע $[-r, r]$ לפי מבחן ויירשטראס.

□

תוצאה

אם הטור מתכנס בהחלט ב $R -$ אזי הוא מתכנס במידה שווה בקטע $[-R, R]$ לפי אותה הוכחה כאשר $y = R$.