פתרון תרגיל 2 אנליזה הרמונית תשף

11 בנובמבר 2019

1. ראשית, נזכור שפונקציה f נקראת אי־זוגית, אם $f(-x) = -f(x)$ לכל x. אם f פונקציה אי־זוגית, מתקיים:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 0$$

(א) נחשב את המכפלות הפנימיות הרלוונטיות:

$$\langle 3, 7x \rangle = \int_{-1}^{1} 3 \cdot 7x dx = 0$$

אפילו בלי לחשב, כי זו פונקציה אי־זוגית. כמו כן:

$$\left\langle 3, 6-18x^2 \right\rangle = \int_{-1}^{1} 3 \cdot \left(6-18x^2\right) dx = \int_{-1}^{1} \left(18-54x^2\right) dx = \left(18x-18x^3\right)\Big|_{x=-1}^{x=1} =$$

$$= 18-18-(-18+18) = 0$$

$$\left\langle 7x, 6-18x^2 \right\rangle = \int_{-1}^{1} 7x \cdot \left(6-18x^2\right) dx = 0$$

שוב, זו פונקציה אי־זוגית. מפה לשם, כל המכפלות מתאפסות ולכן הקבוצה אורתוגונאלית.

(ב) ראשית, נשים לב ש: $span\left\{3, 7x, 6-18x^2\right\} = span\left\{1, x, x^2\right\}$, ולכן מספיק לדרוש שהפונקציה תהיה אורתוגונאלית לפונקציות $1, x, x^2$. נקבל 3 משוואות:

$$\begin{cases} \left\langle 1, x^3+ax^2+bx+c \right\rangle = 0 \\ \left\langle x, x^3+ax^2+bx+c \right\rangle = 0 \\ \left\langle x^2, x^3+ax^2+bx+c \right\rangle = 0 \end{cases}$$

נפתח כל אחת מהמשוואות:

$$\begin{cases} 0=\int_{-1}^{1}1\cdot\left(x^3+ax^2+bx+c\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx\right)\Big|_{x=-1}^{x=1} \\ 0=\int_{-1}^{1}x\cdot\left(x^3+ax^2+bx+c\right)dx=\left(\frac{x^5}{5}+\frac{ax^4}{4}+\frac{bx^3}{3}+\frac{cx^2}{2}\right)\Big|_{x=-1}^{x=1} \\ 0=\int_{-1}^{1}x^2\cdot\left(x^3+ax^2+bx+c\right)dx=\left(\frac{x^6}{6}+\frac{ax^5}{5}+\frac{bx^4}{4}+\frac{cx^3}{3}\right)\Big|_{x=-1}^{x=1} \end{cases}$$

אחרי שנציב את הגבולות, נקבל:

$$\begin{cases} 0=\frac{2a}{3}+2c \\ 0=\frac{2}{5}+\frac{2b}{3} \\ 0=\frac{2a}{5}+\frac{2c}{3} \end{cases}$$

מהמשוואה השניה, נקבל: $b=-\frac{3}{5}$. מהמשוואות הראשונה והשלישית נקבל: $a=c=0$. סה"כ, הפונקציה היא: $f\left(x\right)=x^3-\frac{3}{5}x$.

2. מכיוון שהפולינומים הם לכל היותר ממעלה 2, במכפלה נקבל פולינום שהוא לכל היותר ממעלה 4. לכן, נתחיל מלחשב את האינטגרלים:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}dx$$

עבור $n=0,1,2,3,4$.
נתחיל עם $n=0$:

$$\int_0^\infty e^{-x}dx=\lim_{b\longrightarrow\infty}\int_0^b e^{-x}dx=\lim_{b\longrightarrow\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big|_{x=0}^{x=b}=\lim_{b\longrightarrow\infty}\left(-e^{-b}+e^{-0}\right)=1$$

שנית, המקרה $n=1$:

$$\int_0^\infty xe^{-x}dx=\lim_{b\longrightarrow\infty}\int_0^b xe^{-x}dx=$$

פולינום כפול מעריכית = אינטגרציה בחלקים, מה שיחזור על עצמו גם בחישובים הבאים; במקרה שלנו, $u=x,\ v'=e^{-x}$. לכן, $u'=1,\ v=-e^{-x}$ ונקבל:

$$\lim_{b\longrightarrow\infty}\left(\left(-xe^{-x}\right)\Big|_{x=0}^{x=b}-\int_0^b 1\cdot\left(-e^{-x}\right)dx\right)=\lim_{b\longrightarrow\infty}\left(-be^{-b}+\int_0^b e^{-x}dx\right)$$

המחובר הימני שואף ל־1, כמו שראינו במקרה $n=0$. המחובר השמאלי שואף ל־0, ואפשר להראות זאת לפי לופיטל. ככלל, $-b^ne^{-b}$ שואף ל־0 כאשר $b\longrightarrow\infty$

(אינטואיטיבית, המעריכית "חזקה" יותר מהפולינום).
נקבל:

$$\lim_{b\longrightarrow\infty}\left(-be^{-b}+\int\limits_0^b e^{-x}dx\right)=0+1=1$$

שלישית, עבור $n=2$:

$$\int\limits_0^\infty x^2e^{-x}dx=\lim_{b\longrightarrow\infty}\int\limits_0^b x^2e^{-x}dx=\left\{\begin{array}{cc} u=x^2 & u'=2x \\ v'=e^{-x} & v'=-e^{-x}\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{b\longrightarrow\infty}\left(\left(-x^2e^{-x}\right)\Big|_{x=0}^{x=b}-\int\limits_0^b 2x\cdot\left(-e^{-x}\right)dx\right)=\lim_{b\longrightarrow\infty}\left(-b^2e^{-b}+2\int\limits_0^b xe^{-x}dx\right)=$$

המחובר הימני שואף ל־$2\cdot 1$, המחובר השמאלי שואף ל־0 ונקבל:

$$=0+2\cdot 1=2$$

רביעית, עבור $n=3$:

$$\int\limits_0^\infty x^3e^{-x}dx=\lim_{b\longrightarrow\infty}\int\limits_0^b x^3e^{-x}dx=\left\{\begin{array}{cc} u=x^3 & u'=3x^2 \\ v'=e^{-x} & v'=-e^{-x}\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{b\longrightarrow\infty}\left(\left(-x^3e^{-x}\right)\Big|_{x=0}^{x=b}-\int\limits_0^b 3x^2\cdot\left(-e^{-x}\right)dx\right)=\lim_{b\longrightarrow\infty}\left(-b^3e^{-b}+3\int\limits_0^b x^2e^{-x}dx\right)=$$

המחובר הימני שואף ל־$3\cdot 2$, המחובר השמאלי שואף ל־0 ונקבל:

$$=0+3\cdot 2=6$$

לבסוף, עבור $n=4$:

$$\int\limits_0^\infty x^4e^{-x}dx=\lim_{b\longrightarrow\infty}\int\limits_0^b x^4e^{-x}dx=\left\{\begin{array}{cc} u=x^4 & u'=4x^3 \\ v'=e^{-x} & v'=-e^{-x}\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{b\longrightarrow\infty}\left(\left(-x^4e^{-x}\right)\Big|_{x=0}^{x=b}-\int\limits_0^b 4x^3\cdot\left(-e^{-x}\right)dx\right)=\lim_{b\longrightarrow\infty}\left(-b^4e^{-b}+4\int\limits_0^b x^3e^{-x}dx\right)=$$

המחובר הימני שואף ל־$4\cdot 6$, המחובר השמאלי שואף ל־0 ונקבל:

$$=0+4\cdot 6=24$$

שימו לב שמתקיים:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$$

עבור $n = 0, 1, 2, 3, 4$**; נסו להוכיח זאת באינדוקציה לכל** n**.**

כעת, נוכל לחשב בקלות את המכפלות הרלוונטיות. ראשית, נראה שהפולינומים אכן אורתוגונאליים:

$$\langle 1, 1-x \rangle = \int_0^\infty 1 \cdot (1-x) \, e^{-x} dx = \int_0^\infty e^{-x} dx - \int_0^\infty x e^{-x} dx = 1 - 1 = 0$$

$$\left\langle 1, 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2 \right\rangle = \int_0^\infty 1 \cdot \left(1 - 2x + \frac{1}{2}x^2\right) e^{-x} dx = \int_0^\infty e^{-x} dx - 2\int_0^\infty x e^{-x} dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx =$$

$$= 1 - 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 0$$

$$\left\langle 1 - x, 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2 \right\rangle = \int_0^\infty (1-x) \cdot \left(1 - 2x + \frac{1}{2}x^2\right) e^{-x} dx =$$

$$= \int_0^\infty e^{-x} dx - 3\int_0^\infty x e^{-x} dx + 2\frac{1}{2}\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx - \frac{1}{2}\int_0^\infty x^3 e^{-x} dx = 1 - 3 \cdot 1 + 2\frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 6 = 0$$

והם אכן אורתוגונאליים. נבדוק אורתונורמליות:

$$\|1\|^2 = \langle 1, 1 \rangle = \int_0^\infty 1 \cdot 1 \cdot e^{-x} dx = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$$

$$\|1 - x\|^2 = \langle 1 - x, 1 - x \rangle = \int_0^\infty (1-x) \cdot (1-x) \, e^{-x} dx =$$

$$\int_0^\infty e^{-x} dx - 2\int_0^\infty x e^{-x} dx + \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = 1 - 2 \cdot 1 + 2 = 1$$

$$\left\| 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2 \right\|^2 = \left\langle 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2, 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2 \right\rangle = \int_0^\infty \left(1 - 2x + \frac{1}{2}x^2\right) \cdot \left(1 - 2x + \frac{1}{2}x^2\right) e^{-x} dx =$$

$$= \int_0^\infty e^{-x}dx - 4\int_0^\infty xe^{-x}dx + 5\int_0^\infty x^2e^{-x}dx - 2\int_0^\infty x^3e^{-x}dx + \frac{1}{4}\int_0^\infty x^4e^{-x}dx =$$

$$1 - 4\cdot 1 + 5\cdot 2 - 2\cdot 6 + \frac{1}{4}\cdot 24 = 1$$

הנורמה של כל פולינום שווה ל־1, ולכן הם אורתונורמליים.