# פתרון תרגיל 5 גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית תשע"ו

31 במרץ 2016

1. נניח בה"כ שהעקמומיות מונוטונית עולה.
לכן, לכל $0 \leq a \leq b \leq L$ מתקיים: $k(a) \leq k(b)$.
העקומה סגורה, ובפרט $k(0) = k(L)$.
נקבל שלכל $0 \leq a \leq L$ מתקיים: $k(a) = k(0)$, והעקמומיות קבועה.

2. $\gamma(t) \in S^2$ לכל $t \in [a,b]$, ולכן $\|\gamma(t)\| = 1$. לכן גם $\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = 1$.
לפיכך, אם נגזור נקבל:

$$\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle' = (1)' = 0$$

ומצד שני:

$$\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle' = \langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle + \langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle = 2 \langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle$$

ונקבל: $\langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle = 0$ לכל $t \in [a,b]$, כלומר $\gamma \perp \gamma'$.

3. נשתמש בנוסחת בייטמן.

(א) הפונקציה היא:

$$F(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

הנגזרות החלקיות הן:

$$F_x = \frac{2x}{a^2}, F_y = \frac{2y}{b^2}$$

$$F_{xx} = \frac{2}{a^2}, F_{xy} = 0, F_{yy} = \frac{2}{b^2}$$

ולכן:

$$|k|=\frac{\left|F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2\right|}{\left(\sqrt{F_x^2+F_y^2}\right)^3}=\frac{\left|\frac{2}{a^2}\cdot\frac{4y^2}{b^4}+\frac{2}{b^2}\cdot\frac{4x^2}{a^4}\right|}{\left(\sqrt{\frac{4y^2}{b^4}+\frac{4x^2}{a^4}}\right)^3}=$$

$$=\frac{\frac{8}{a^2b^2}\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}\right)}{8\left(\sqrt{\frac{y^2}{b^4}+\frac{x^2}{a^4}}\right)^3}=\frac{1}{a^2b^2\left(\sqrt{\frac{y^2}{b^4}+\frac{x^2}{a^4}}\right)^3}$$

(ב) הפונקציה היא:

$$F(x,y)=x^3-y^2=0$$

הנגזרות החלקיות הן:

$$F_x=3x^2, F_y=-2y$$

$$F_{xx}=6x, F_{xy}=0, F_{yy}=-2$$

ולכן:

$$|k|=\frac{\left|F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2\right|}{\left(\sqrt{F_x^2+F_y^2}\right)^3}=\frac{\left|24xy^2-18x^2\right|}{\left(\sqrt{9x^4+4y^2}\right)^3}$$

4. נגזור ונכפיל את וקטורי הנגזרות זה בזה.

(א) פרמטריזציה של המשטח היא:

$$r(u,v)=(u,v,f(u,v))$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$r_u=(1,0,f_u), r_v=(0,1,f_v)$$

ולכן מקדמי המטריקה הם:

$$g_{11}=\langle r_u,r_u\rangle=1+f_u^2$$
$$g_{12}=g_{21}=\langle r_u,r_v\rangle=f_uf_v$$
$$g_{22}=\langle r_v,r_v\rangle=1+f_v^2$$

ובסה"כ המטריקה היא:

$$G=\begin{pmatrix} 1+f_u^2 & f_u f_v \\ f_u f_v & 1+f_v^2 \end{pmatrix}$$

(ב) המשטח שלנו הוא חרוט.

נחשב את וקטורי הנגזרות:

$$r_u=(\cos v,\sin v,k)\,,r_v=(-u\sin v,u\cos v,0)$$

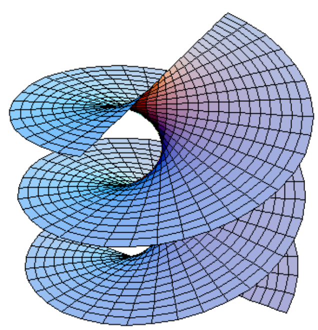
מקדמי המטריקה הם:

$$g_{11}=\langle r_u,r_u\rangle=\cos^2 v+\sin^2 v+k^2=1+k^2$$
$$g_{12}=g_{21}=\langle r_u,r_v\rangle=-u\cos v\sin v+u\cos v\sin v+0^2=0$$
$$g_{22}=\langle r_v,r_v\rangle=u^2\sin^2 v+u^2\cos^2 v+0^2=u^2$$

ולכן התבנית היסודית הראשונה מיוצגת על ידי המטריצה:

$$G=\begin{pmatrix} 1+k^2 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}$$

(ג) המשטח שלנו הוא הליקואיד:



נחשב את וקטורי הנגזרות:

$$r_u=(\cos v,\sin v,0)\,,r_v=(-u\sin v,u\cos v,k)$$

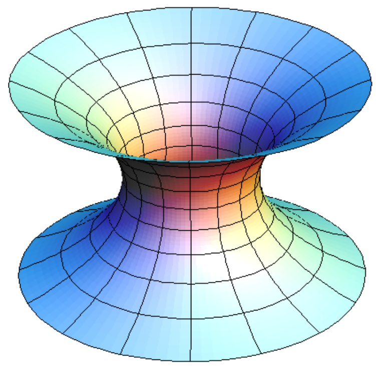
מקדמי המטריקה הם:

$$g_{11}=\langle r_u,r_u\rangle=\cos^2 v+\sin^2 v=1$$
$$g_{12}=g_{21}=\langle r_u,r_v\rangle=-u\cos v\sin v+u\cos v\sin v+0=0$$
$$g_{22}=\langle r_v,r_v\rangle=u^2\sin^2 v+u^2\cos^2 v+k^2=u^2+k^2$$

ולכן התבנית היסודית הראשונה נתונה על ידי המטריצה:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + k^2 \end{pmatrix}$$

(ד) המשטח שלנו הוא קטנואיד:



לפני שנתחיל בגזירות ובחגיגות, נזכור ש:

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

ובזהויות בסיסיות של הפונקציות ההיפרבולית, כגון:

$$(\cosh t)' = \sinh t, (\sinh t)' = \cosh t, 1 = \cosh^2 t - \sinh^2 t$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$r_t = (\sinh t \cos\theta, \sinh t \sin\theta, 1), r_\theta = (-\cosh t \sin\theta, \cosh t \cos\theta, 0)$$

נחשב את מקדמי המטריקה:

$$g_{11} = \langle r_t, r_t \rangle = \sinh^2 t \cos^2\theta + \sinh^2 t \sin^2\theta + 1 = \sinh^2 t + 1 = \cosh^2 t$$
$$g_{12} = g_{21} = \langle r_t, r_\theta \rangle = 0$$
$$g_{22} = \langle r_\theta, r_\theta \rangle = \cosh^2 t \sin^2\theta + \cosh^2 t \cos^2\theta = \cosh^2 t$$

ולכן:

$$G = \begin{pmatrix} \cosh^2 t & 0 \\ 0 & \cosh^2 t \end{pmatrix}$$

(ה) וקטורי הנגזרות הם:

$$r_t = (2\cos t\cos\theta, 2\cos t\sin\theta, -2\sin t), r_\theta = (-2\sin t\sin\theta, 2\sin t\cos\theta, 0)$$

נחשב את מקדמי המטריקה:

$$\begin{gathered} g_{11} = \langle r_t, r_t\rangle = 4\cos^2 t\cos^2\theta + 4\cos^2 t\sin^2\theta + 4\sin^2 t = 4 \\ g_{12} = g_{21} = \langle r_t, r_\theta\rangle = 0 \\ g_{22} = \langle r_\theta, r_\theta\rangle = 4\sin^2 t\sin^2\theta + 4\sin^2 t\cos^2\theta = 4\sin^2 t \end{gathered}$$

ולכן:

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4\sin^2 t \end{pmatrix}$$

(ו) המשטח שלנו הוא היפרבולואיד.
וקטורי הנגזרות הם:

$$r_v = (\sinh v\cos\theta, \sinh v\sin\theta, \cosh v), r_\theta = (-\cosh v\sin\theta, \cosh v\cos\theta, 0)$$

מקדמי המטריקה הם:

$$\begin{gathered} g_{11} = \langle r_v, r_v\rangle = \sinh^2 v\cos^2\theta + \sinh^2 v\sin^2\theta + \cosh^2 v = \cosh 2v \\ g_{12} = g_{21} = \langle r_v, r_\theta\rangle = 0 \\ g_{22} = \langle r_\theta, r_\theta\rangle = \cosh^2 v\sin^2\theta + \cosh^2 v\cos^2\theta = \cosh^2 v \end{gathered}$$

ולכן המטריקה היא:

$$G = \begin{pmatrix} \cosh 2v & 0 \\ 0 & \cosh^2 v \end{pmatrix}$$