1. יהי V מ"ו נ"ס.

$T:V\to V$ אופרטור לינארי

קיימת מט' A כך שלכל שני בסיסים B,C

$$[T]_C^B = A$$

הוכח כי A מט' האפס.

פתרון:

נניח $T\neq 0$, אז $\operatorname{Im} T\neq 0$ (ובפרט)

$\exists$ $v\neq 0$ כך ש- $Tv\neq 0$.

נשלים את V לבסיס B

$$B=\{v,u_1,\dots,u_n\}$$

(1) $[T]_B^B = \begin{bmatrix} [Tv]_B & \cdots & \end{bmatrix}$

נתבונן בבסיס אחר:

$$C=\{\lambda v, u_1,\dots,u_n\}$$

(2) $[T]_C^C = \begin{bmatrix} \; & \cdots & \end{bmatrix}$

B U ...

$$[T(\lambda v)]_B = \lambda [Tv]_B$$

נניח סקלר $\lambda \neq 0,1$ אז:

$$.[Tv]_B \neq \lambda [Tv]_B = [T(\lambda v)]_B$$

$F \neq \mathbb{Z}_2$:

$$T : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \qquad \{0,1\}$$

$$[T]^B_C = [1]$$

$\dim_F V = 1$

② $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$

$$T(1+x) = (1,1,1)$$
$$T(1-x) = (1,0,-1)$$
$$T(1+x^2) = (3,1,-1)$$

$T(a+bx+cx^2)$

$\{e_1, e_2, e_3\} = E \qquad \{1, x, x^2\} = E'$

$$\{1+x, 1-x, 1+x^2\} = B$$

$$[T]^B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\ldots_E \quad [1\ -1\ -1]$$

$$[T]_E^{E'} = [T]_E^B \cdot \underbrace{[I]_B^{E'}}_{\left([I]_{E'}^B\right)^{-1}}$$

$$[I]_{E'}^B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & & \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & & & 1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & \\ 0 & 0 & 1 & & & 1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & & & 1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=\,[I]_B^{E'}}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$[T]_E^{E'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T(\overbrace{a+bx+cx^2}) = aT(1) + bT(x) + cT(x^2) =$$

$$= a\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a+2c \\ 1/2a + 1/2b + 1/2c \\ b-c \end{pmatrix}$$

---

3) תהי $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

ונוכיח שקיימת $A \in \mathbb{K}$.

$$BA = B^T$$

אז תן דוגמה נגדית.

דוגמה נגדית:

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}(A) = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} \leftarrow 0 \quad 0$$

(4) יהי V מ"ו נ"ס ותהיינה:

ה"ל. $T,S : V \longrightarrow V$

נתון: $T^2 + T = S$.

• S הפיכה.

הוכחה/הפיך: T הפיכה.

$$S = T^2 + T = T(T+I)$$

נכפיל S^{-1} מימין:

$$T\underbrace{(T+I)S^{-1}} = I$$

ולכן T הפיכה.

דרך אחרת:

$$S = T(T+I)$$

לכן:

$$V = \mathrm{Im}\, S \subseteq \mathrm{Im}\, T \subseteq V$$

נכון $\mathrm{Im}\,T = V$ כי T על,

$T: V \to V \Leftarrow$ הפיכה.

5. צ"ל: אם $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ הפיכה.

$$A = \mathrm{adj}(2A)$$

$$\mathrm{adj}(2A) = |2A| \cdot (2A)^{-1} =$$

$$= 4|A| \cdot A^{-1}$$

$$\Downarrow$$

$$A \cdot \mathrm{adj}(2A) = 4|A| \cdot I \qquad \begin{pmatrix} 4|A| & 0 & 0 \\ 0 & 4|A| & 0 \\ 0 & 0 & 4|A| \end{pmatrix}$$

$$A^2 = 4|A| \cdot I$$

$$|A|^2 = \underbrace{4^3}_{64} |A|^3$$

$$\Updownarrow$$

$$|A| = 1/64$$

אבל:

$$A^2 = 4|A| \cdot I$$

וכך

(תכונות של הפיכה) $\mathrm{adj}(2A) =$

$$= 4|A| \cdot A^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4|A| \cdot I = A \cdot \mathrm{adj}(2A).$$

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

ב. $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ הפיכה:

$$A = adj(-2A)$$

בהצלחה.

6. המשך לשאלה 2:

$$[T]_E^{E'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ker T

$$N\left([T]_E^{E'}\right) = ?$$

מדרגים, מוצאים פתרון כללי $\Leftarrow$ בסיס

למרחב הפתרונ'- $\Leftarrow$ בהתאמה ל-$\mathbb{R}_2[x]$.

Im T

$$C([T]^E_E) = \,!$$

מציבים, מקבלים משוואות תלויות ופותרים ע״י העמודות המתאימות במט׳ המייצגת.

$$T(1+x^2) = (1,1,1)$$
$$T(1-x^2) = \dots$$

$$B = \{v_1, v_2, v_3\}$$ 7.

$$v_1 = (1,0,1)$$
$$v_2 = (0,2,1)$$
$$v_3 = (0,1,-1)$$

$$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

E = בסיס סטנ׳

$$T(a,b,c) = (2a+b-2c,\ a,\ -a+b+c)$$ *

מצאו בסיס C ל-$\mathbb{R}^3$ כך ש-

$$[T]^B_C = I$$

$$[I]^E_C\left([T]^E_E[I]^B_E\right) = [T]^B_C \overset{?}{=} I$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\1&1&-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2&1&-2\\1&0&0\\-1&1&1\end{bmatrix}$$

נכון:

$C=\{c_1,c_2,c_3\}$

$T(v_1)=c_1$

$T(v_2)=c_2$

$T(v_3)=c_3$

הפיכה T

$$[I]^E_C \cdot \left[\text{[illegible]}\right] = I$$

פירוש:

$$[I]^C_E =$$

$$= \begin{bmatrix}2&1&-2\\1&0&0\\-1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\1&1&-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&3\\1&0&0\\0&3&0\end{bmatrix}$$

ב. T הפיכה.

ג. $\underbrace{T^{-1}(a,b,c)}$.

$T^{-1}(ae_1+be_2+ce_3)$

$$[T]^E_E = \begin{bmatrix}2&1&-1\\1&0&1\\-2&0&1\end{bmatrix}$$

מבינים כדי להפוך:

$$[T^{-1}]^E_E = \left[\ \cdots\ \right]$$

$[T^2]^B$

ג. ? $\overset{?}{=} \operatorname{rank} [\ \ ]_B$

T הפיכה $\Longrightarrow$ T^2 הפיכה $\Longrightarrow$

לכן המט' המייצג שלה לפי כל בסיס יהיה

$\operatorname{rank} = \underline{\underline{3}}$.

$[T^2]_B^B$

ה. מצאו בסיס C ל-$\mathbb{R}^3$ שעליו

$$[T]_B^C = I.$$

אל קוניתו...

הוכחה* - T הפיכה, נגדיר:

$$C = \{T^{-1}v_1, T^{-1}v_2, T^{-1}v_3\}$$

$$[T]_B^C = \begin{bmatrix} | & | & | \\ [T(T^{-1}v_1)]_B & [T(T^{-1}v_2)]_B & [T(T^{-1}v_3)]_B \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} | & | & | \\ [v_1]_B & [v_2]_B & [v_3]_B \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ בסיס, T^{-1} הפיכה ולכן

$\{T^{-1}v_1, T^{-1}v_2, T^{-1}v_3\}$ בסיס גם כן.

$$\mathrm{adj}(bA) = b^{n-1}\,\mathrm{adj}(A)$$

$$(-1)^{i+j}|bA_{ji}| = b^{n-1}(-1)^{i+j}|A_{ji}|$$

---

8. A,B מ׳ $R^{3\times3}$

$$C(A) \oplus R(B) = \mathbb{R}^3$$

א׳ צ״ל: $A \neq B$.

פתרון:

משפט המימדים:

$$\dim C(A) + \dim R(B) = 3$$

אם $A=B$:

$$\dim C(A) + \dim R(A) = 3$$

אך ידוע כי $\dim C(A) = \dim R(A)$ ולכן:

$$2 \cdot \dim C(A) = 3$$

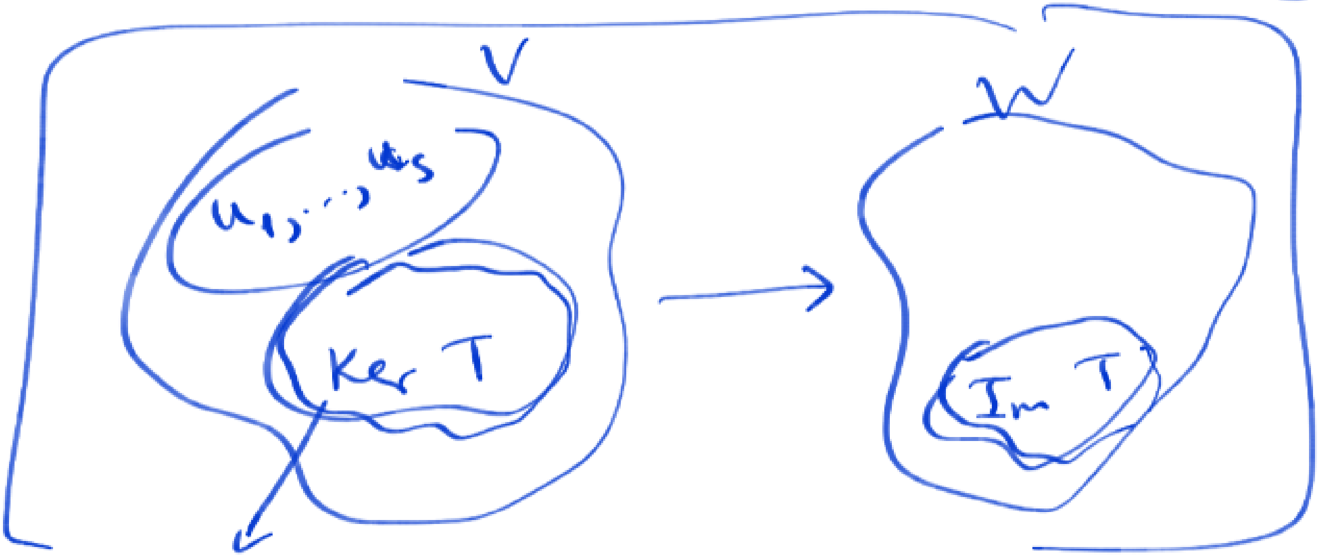
סתירה.

ב׳ $A^2 = 0$. צ״ל: $A - 2I$ הפיכה.

$(A \quad I)(A \quad I)$

$$(A-2I)(A+2I) =$$
$$A^2 - 4I = -4I$$
$$(A-2I)^{-1} = -\frac{1}{4}(A+2I)$$

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T \qquad (9)$$



$(v_1, \dots, v_d)$

$$\{Tu_1, \dots, Tu_s\} \subseteq \operatorname{Im} T$$

: פ.ש (1)

$$w \in \operatorname{Im} T \Rightarrow w = T\underline{v} \Rightarrow$$
$$w = T(\cancel{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_d v_d} + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_s u_s) =$$
$$= \beta_1 Tu_1 + \dots + \beta_s Tu_s$$

: בת"ל (2)

$$\alpha_1 Tu_1 + \dots + \alpha_s Tu_s = 0$$
$$\parallel$$
$$T(\qquad)$$

$$T(\underbrace{\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_s u_s}_{\in \operatorname{Ker} T}) = 0$$

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_s u_s = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_d v_d$$

שריר׳ אלגב׳ ונקבל $\nexists$ צ״ל סקלר׳ הבסיס

שאפס $\{v_1, \ldots, v_d, u_1, \ldots, u_s\}$

$\Downarrow$

$\nexists$ לא טריוויאלי $\Leftarrow$ $\alpha_1 = \cdots = \alpha_s = 0$.

מסקנה:

$$\dim \operatorname{Im} T = s$$

$$\underbrace{\dim \operatorname{Ker} T}_{d} + s = \dim V$$

מ.ש.ל.

---

10. חלק ב׳

$$T: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$T^2 = 0$$

$$\begin{cases} v_1 = (1,2,0,2) \\ v_2 = (1,1,0,0) \end{cases} \in \operatorname{Im} T$$

מצאו נוסחה מפורשת.

$T u = v$ $\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$Tv_1 = v_3$

$Tv_2 = v_4$

$Tv_3 = Tv_4 = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [T]_B^B$$

השלמה לבסיס v_3, v_4

$T^2 v_1 = \dots = T^2 v_4 = 0$.

$T^2 = 0$.

T הפיכה $[T]_C^B$ הפיכה

$$[S \circ T]_D^B = [S]_D^C [T]_C^B$$

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{T} & W & \xrightarrow{S} & U \\ B & \xleftarrow{T^{-1}} & C & & D \end{array}$$

בפרט:

$$[I]_B^B = [T^{-1} \circ T]_B^B =$$

$$= \underbrace{[T^{-1}]_B^C [T]_C^B}$$

לכן הפיכה.

$A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ (11.

מדורגת קנונית $CF(A)$

א. ב-$CF(A)$ יש שורת אפסים $\Leftrightarrow$
ב-$CF(A^2)$ יש שורת אפסים.

הוכחה:
ב-$CF(A)$ יש שורת אפסים $\Leftrightarrow$ A לא הפיכה
$\Leftarrow$
ב-$CF(A^2)$ יש שורת אפסים $\Leftrightarrow$ A^2 לא הפיכה

הסבר מעמיק יותר:

אם ב-$CF(A)$ יש שורת אפסים $\Leftarrow$ $CF(A)$ לא הפיכה ולכן A לא הפיכה.

ואם ב-$CF(A)$ אין שורת אפסים $\Leftarrow$ בכל שורה יש איבר מוביל $\Leftarrow$
בכל עמודה יש איבר מוביל (מטריצה ריבועית) $\Leftarrow$ המשתנים תלויים $\Leftarrow$ A הפיכה.

ב. $\text{rank}\, A > 2 \Leftarrow A^2 \neq 0$.

הוכחה:
$A^2 = 0 \Leftarrow$

$$C(A) \subseteq N(A)$$

$$\underbrace{\dim C(A)}_{\text{rank}(A)} \le 5 - \text{rank}(A) \qquad \left\{ \begin{array}{l} T: F^n \to F^n \\ T(v) = A \cdot v \end{array} \right.$$

$\operatorname{rank} A = 2 \ldots$

$\Downarrow$

$\operatorname{rank} A \le 2$ סתירה.

ב. $\operatorname{rank} A = 4 \overset{?}{\Leftarrow} \operatorname{rank} A^2 = 4$.

$4 = \operatorname{rank} A^2 \le \operatorname{rank} A \neq 5$

אם $\operatorname{rank} A = 5$ אז A הפיכה $\Leftarrow A^2$ הפיכה $\Leftarrow$ $\operatorname{rank} A^2 = 5$.

לכן: $\operatorname{rank} A = 4$.

$$A \cdot A = 0$$

$$\left[\underbrace{A \cdot C_1(A)}_{=0} \quad \cdots \quad \underbrace{A \cdot C_n(A)}_{=0}\right] = 0$$

לכן: $C_1(A), \ldots, C_n(A) \in N(A)$.

$$C(A) = \operatorname{Span}_F\{C_1(A), \ldots, C_n(A)\} \subseteq N(A)$$

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

12. חוג — תו. 1

$T^3 = -T$, T הפיכה.

הוכחה שלא קיים:

אם T הפיכה $\Leftarrow$ נקח בסיס ל-$\mathbb{R}^3$

$$\left(\det [T]_B^B\right)^3 = (-1)^3 \det [T]_B^B$$

$$\det [T]_B^B \cdot \left(\underbrace{\left(\det [T]_B^B\right)^2}_{\neq 0} + 1\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$\det [T]_B^B = 0$ לא הפיכה.

שאלה מאתגרת:

אם שואלים על $T \neq 0$: מוניק T לא

יכולה להיות הפיכה, למשל: T ש

לא צריך להיות ממד אי-זוגי.

$$Tv = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot v$$

$$Te_1 = -e_2$$

$$T^2 e_1 = -Te_1 = -e_1$$

$T^3 e_1 = e_2 = -Te_1$

בדומה מראים $T^3 e_2 = -Te_2$, $T^3 e_3 = -Te_3$

לכן $T^3 = -T$.

$$T: V \to W$$

$\dim V = \dim W$: T הפיכה $\iff$ T על $\iff$ T חח"ע

(הכלי חזק)

$\dim V \neq \dim W$: לא הפיכה.

<u>מבחן דמה מועד</u>

(1) ט. $\ker T = \operatorname{Im} T$

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

לא: ממשפט המימדים: $\dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = 3$

$2 \dim \operatorname{Ker} 1$

סתירה.

1. $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Im} T$

$T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

כן:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$Te_1 = e_3, \quad Te_2 = e_4, \quad Te_3 = Te_4 = 0$

$e_3, e_4 \in \operatorname{Ker} T, \quad e_3, e_4 \in \operatorname{Im} T$

מכיוון ש- $4 = \underbrace{\dim \operatorname{Ker} T}_{\geq 2} + \underbrace{\dim \operatorname{Im} T}_{\geq 2} \Leftarrow \operatorname{Ker} T = \operatorname{Im} T = \operatorname{Span}_F\{e_3, e_4\}$.

ג. הוכיחו (הפרכה) נכון: (דוגמא)

2. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T \neq 0, I$

$Tv = 0$ או $Tv = v$

לא: נניח: $0 \neq u \in \operatorname{Ker} T$

ידוע כי $T \neq 0$ לכן קיים $0 \neq v \in V$:

$Tv \neq 0$

לכן: $Tv = v$

שני מקרים:

- $T(u+v) = 0 \Rightarrow \underbrace{Tu}_{0} + Tv = 0$ סתירה

- $T(u+v) = u+v \Rightarrow \underbrace{Tu}_{0} + \underbrace{Tv}_{v} = u+v \Rightarrow$

$\Rightarrow u = 0$ סתירה

מסקנה - $\mathrm{Ker}\, T = 0$ ולכן:

לכל $v \neq 0$ מתקיים: $Tv \neq 0$

ולכן מהנתון: $Tv = v$

לכן $T = I$. לפיכך לא קיים כמבוקש. ה.ל.

2.

$A \in R^{n \times n}$

$R(A) \subseteq C(A)$

הוכח/הפרך: A סינגולרי___.

דוגמא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כל מט' הפיכה לא סינגולרית.

$$R(A) = \mathbb{R}^n = C(A)$$

3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & t \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

א - מתי A הפיכה?

$$|A| = t\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= t(a-1) + (1-a^2) =$$

$$(a-1)\cdot(t-(a+1))$$

לכן: A הפיכה אמ"מ:

$$\boxed{a \neq 1 \quad \text{וגם} \quad t \neq a+1}$$

ב - מתי $(1,1,2) \notin C(A)$?

אם A הפיכה אז $C(A) = \mathbb{R}^3$

ולכן $(1,1,2) \in C(A)$.

1. $a = 1$:

$\left(1 \quad 1 \quad t \;\vdots\; 1\right.$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & t & 1 \\ 0 & 0 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & 1 \end{array}\right) \leftarrow \underline{\underline{t \neq 1}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & 1 \end{array}\right)$$

$$x_3 = \frac{1}{1-t}, \qquad -t \cdot x_3 = 0$$

$$t = 0 \Leftarrow \frac{-t}{1-t} = 0$$

$$x_2 = 17$$

$$x_1 = 1 - x_2 = -16$$

$$\boxed{t = 0 \quad , a = -1} \times$$

$$t = a+1 \qquad \underline{a \neq 1} \times$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a+1 & 1 \\ a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a+1 & 1 \\ \dots \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1-a^2 & -a(a+1) & 1-a \\ 0 & 1-a & -a & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a+1 & 1 \\ 0 & 1-a & -a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & -a(a+1) & 1-a \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a+1 & 1 \\ 0 & 1-a & -a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2a \end{array}\right)$$

$$-a(a+1)-(1+a)\cdot(-a) =$$

$$= \cancel{-a^2} \cancel{-a} \cancel{+a} \cancel{+a^2}$$

מסקנה: $a=0$, $t=a+1=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

יש פתרון.

לכן: $(1,1,2) \in C(A)$ אמ״מ

$(a \neq 1$ וגם $t \neq a+1)$ או $(a=1$ וגם $t=0)$ או

או $(a=0,\ t=1)$

$(1,1,2) \notin C(A) \iff$

$$(a=1 \lor t=a+1) \land (a\neq 1 \lor t\neq 0) \land$$
$$\land (a\neq 0 \lor t\neq 1)$$

$$\boxed{\begin{array}{l}(a=1,\ t\neq 0)\\ \text{או:}\\ (t=a+1 \ \text{וגם}\ a\neq 0)\end{array}}$$

ד. הוכחה: לכל a,t:

$$C(A)\cap R(A)\neq 0 .$$

מאחר והמימדים מספיק להראות כי לכל a,t:

$$\dim C(A)=\dim R(A)\ \underline{\underline{\geq 2}}$$

כי אז לפי משפט המימדים:

$$3\geq \dim C(A)+R(A)=\dim C(A)+\dim R(A)$$
$$-\dim C(A)\cap R(A)\geq 4-\dim C(A)\cap R(A)$$

לכן:

$$\dim C(A)\cap R(A) \geq 1 .$$

כלומר, $C(A)\cap R(A)\neq 0$.

זה אומר מתקיים:

$$\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בת"ל לכל a,t: אם:

$$\lambda_1\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 a+\lambda_2 t \\ \lambda_1 \\ \lambda_1+\lambda_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ואז $\lambda_1=0$ ולכן $\lambda_2=0$,

כלומר יצאו בלתי תלוי.

בפרט,

$$\dim C(A) \geq 2$$

$$\left(\dim R(A)\right)$$

$T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ד.

$$[T]^B_C = I$$

$$B = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,0,1)\}$$

$$C = \{(1,0,-1),(0,1,1),(2,0,1)\}$$

א׳ – $I = [T]^B_C$ (הפיכ הפיכה לכן

T הפיכה לכן $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^3$:

$$\boxed{\begin{array}{c}\{e_1, e_2, e_3\} \\ \dim \operatorname{Im} T = 3\end{array}}$$

ב׳ – T חח״ע $\Leftarrow$ $\operatorname{Ker} T = 0$:

$$\boxed{\begin{array}{c}\emptyset \\ \dim \operatorname{Ker} T = 0\end{array}}$$

ג׳ – $$[T]^E_E = \underbrace{[I]^C_E}_{} \underbrace{[T]^B_C}_{I} [I]^E_B$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \end{pmatrix}^{=} \qquad I \qquad \| \qquad ([T]^B)^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left(C \; \right)_E$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 0 & & 1 & \\ 0 & 1 & 1 & & & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & & \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & \\ 0 & 1 & 1 & & & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & & 1 & -1 & 0 \\ & & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$[T]_E^E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cancel{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T(x,y,z) = T(xe_1 + ye_2 + ze_3) =$$

$$= x\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2x+3y+2z \\ x-y \\ -y+z \end{pmatrix}$$

נוסחה ל- T' : הופכי ל- $[T]_E^E$.

5.

$\mathbb{R}_2[x]$

$$W = \{p(x) \mid p(x) = x(ax+b)+2a\}$$

$$U = \{p(x) \mid p(1) = 0\}$$

$$U,\ W,\ U\cap W,\ U+W$$

$$W = \{p \mid p(x) = 2a + bx + ax^2\}$$

מרחב הקו״ר לפי $\{1,x,x^2\}$:

$$W' = \left\{ \begin{bmatrix} 2a \\ b \\ a \end{bmatrix} : a,b\in\mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ a\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : a,b\in\mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

קל לראות שבת

בחזרה למרחב הפולינומים:

$$\boxed{\begin{array}{l} W = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{2+x^2,\ x\} \quad \text{בסיס ל-}W\text{:} \\ \dim_{\mathbb{R}} W = 2 \end{array}}$$

$$U = \{p \mid p(1)=0\} =$$

$$= \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0 + a_1 + a_2 = 0\}$$

נעבור למרחב הקואורדינטות לפי $\{1, x, x^2\}$:

$$U' = \left\{ \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \middle| \ a_0 + a_1 + a_2 = 0 \right\} =$$

$$= N\left(\begin{bmatrix} \overbrace{1}^{\text{תלוי}} & \overbrace{1 \quad 1}^{\text{חופשיים}} \end{bmatrix} \right) = \left\{ \begin{bmatrix} -t-s \\ s \\ t \end{bmatrix} : t,s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_3 = t \\ x_2 = s \\ x_1 = -t-s \end{cases}$$

$$= \left\{ t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

בסיס ל-U'

נחזור למרחב הפולינומים:

$$\boxed{\begin{gathered} U = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \{-1+x^2, -1+x\} \\ \dim_{\mathbb{R}} U = 2 \end{gathered}}$$

נחשב חיתוך:

$\underline{U' \cap W'}$:

פותרים עם המלבני

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

פורש ל-W בסיס ל-U

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3/2 & 1/2 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$x_4 = t$

$x_3 = -t/3$

$x_2 = -t$

$x_1 = 1/2\, x_3 + 1/2\, x_4 = -\frac{1}{6}t + \frac{1}{2}t = \frac{1}{3}t$

$$t \cdot \left[\begin{array}{c} 1/3 \\ -1 \\ \hdashline -1/3 \\ 1 \end{array}\right]$$

$$U' \cap W' = \text{Span}\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{} \cdot \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} 2/3 \end{bmatrix}$$

W — :

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\left(\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{בסיס ל}} \cdot \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1 \\ -1/3 \end{bmatrix} \right)$$

U — :

באופן שקול ניתן לקבל:

בחזרה למרחב הפולינומים:

$$\boxed{\begin{aligned} U \cap W &= \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\left\{ \tfrac{2}{3} - x + \tfrac{1}{3}x^2 \right\} \\ &= \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\left\{ 2 - 3x + x^2 \right\} \\ \dim_{\mathbb{R}} U \cap W &= \underline{1} \end{aligned}}$$

<u>לגבי $U+W$:</u>

משפט המימדים:

$$\dim_{\mathbb{R}} U+W = \dim U + \dim W -$$

$$- \dim U \cap W =$$

$$= 2 + 2 - 1 = 3$$

לכן: $U+W \cong \mathbb{R}_2[x]$ ובפרט:

$$\boxed{\begin{array}{l} \{1, x, x^2\} \text{ בסיס ל-} U+W \\ \dim_{\mathbb{R}}(U+W) = 3 \end{array}}$$

אלטרנטיבית:

$$\begin{array}{cc} \text{בסיס ל-}W & \text{בסיס ל-}U \\ \left[\begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right] \end{array} \xrightarrow{\text{לדרג}}$$

ולשלוף את העמודות (המקוריות) המתאימות למשתנים התלויים.

ונקבל ש-

$$\boxed{\begin{array}{l} U+W = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{2+x^2, x, -1+x^2\} \\ \dim_{\mathbb{R}} U+W = 3 \end{array}}$$

.ת.ל.ק

$$\begin{bmatrix} | & & | & | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n & u_1 & \cdots & u_m \\ | & & | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ \hline \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in$$ ~~ת.ל.ק~~