תרגיל 4 אינפי 3 תשע"ו

9 בנובמבר 2015

1. תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$, ונסמן את קבוצות נקודות הגבול שלהן ב־$\lim A,\lim B$ בהתאמה. הוכיחו או הפריכו:

   (א) $\lim A\cap\lim B=\lim\left(A\cap B\right)$.

   (ב) $\lim A\cup\lim B=\lim\left(A\cup B\right)$.

   (ג) $\lim A\times\lim B=\lim\left(A\times B\right)$.

   (ד) $\lim A\backslash\lim B=\lim\left(A\backslash B\right)$.

2. הוכיחו שהמרחבים הבאים הם שלמים:

   (א) $C\left[a,b\right]$ עם הנורמה $\|f\|=\sup_{x\in[a,b]}\left|f\left(x\right)\right|$.

   (ב) $l_2=\left\{\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\middle|\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2<\infty\right\}$ עם הנורמה $\|\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}\|=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2}$.

3. תהי $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי.

   (א) הראו שאם לסדרה יש גבול חלקי (גבול של תת־סדרה), זהו הגבול של הסדרה.

   (ב) הסיקו שמרחב מטרי קומפקטי הוא מרחב שלם.

4. יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי. נגדיר את **הקוטר** של תת־קבוצה $A\subseteq X$ על ידי:

$$\delta\left(A\right)=\sup\left\{d\left(x,y\right)\middle|x,y\in A\right\}$$

הוכיחו שמרחב מטרי הוא שלם אם ורק אם לכל סדרה יורדת של קבוצות סגורות $X\supseteq\cdots\supseteq F_n\supseteq F_{n+1}\supseteq\cdots$ המקיימת $\delta\left(F_n\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ מתקיים $\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\neq\emptyset$.

5. הוכיחו כי הנורמה האוקלידית הסטנדרטית $\|\|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ היא פונקציה רציפה.

6. האם הפונקציות הבאות רציפות?

(א) העתקת ההטלה על הרכיב הראשון, $p_1 : (\mathbb{R}^n, d_{max}) \to (\mathbb{R}, ||)$.

(ב) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+x^3+y^3}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

(ג) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\arcsin(xy-2)}{\arctan(3xy-6)} & (x,y) \neq (2,1) \\ 0 & (x,y) = (2,1) \end{cases}$$