תרגיל בית מספר 2

שאלה 1

הוכח שבכל אחד מהמקרים הבאים, אם המכפלה באחד האגפים מוגדרת, אז גם המכפלה באגף השני מוגדרת, ותוצאתן שווה:

א. $(B+C)A = BA + CA$.

ב. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ (כאשר $\alpha \in F$).

ג. $A0 = 0$ וכן $0A = 0$.

שאלה 2

חשב את המכפלות הבאות או הסבר מדוע אינן מוגדרות:

א. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$

שאלה 3

א. הכפילו את המטריצות הבאות בשני הסדרים EF ו FE:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}.$$

האם $EF = FE$?

ב. עבור A, B הבאים, חישבו את A^2, A^3, B^2, B^3 והעריכו מה תהיה התוצאה ל A^5, A^n, B^5, B^n:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

שאלה 4

תהא $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, ויהא $\alpha \in \mathbb{F}$. הוכח:

א. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$.

ב. $(A^t)^t = A$.

שאלה 5

א. תן דוגמא לשתי מטריצות $A, B \in \mathbb{F}^{3\times 3}$ שעבורן $AB - BA = I$.

ב. תהא $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ מטריצה, כך ש $tr(AA^t) = 0$. הוכח ש $A = 0$.

ג. עבור מטריצה $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, נגדיר את המטריצה A^* ע"י $A^* = \overline{A^t}$.
הוכח שאם $tr(AA^*) = 0$ אז $A = 0$.

שאלה 6

1. פתור המערכות הבאות בשימוש פעולות שורה בסיסיות על המשוואות.

(א) $\begin{aligned} x_1 + 7x_2 &= 4 \\ -2x_1 - 9x_2 &= 2 \end{aligned}$ (ב) $\begin{aligned} x_2 - 4x_3 &= 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 10x_1 - 16x_2 + 14x_3 &= 2 \end{aligned}$.

2. במערכת (א) ציירו את הישרים עבור המשוואות וסמנו את נקודת החיתוך.

שאלה 7

במערכת הבאה, החלף את סימן השאלה במספר כך ש

א. למערכת יש 0 פתרונות.

ב. למערכת יש אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{l} 3x+2y=7 \\ 6x+4y=? \end{array}.$$

ג. הצב את הערך שקיבלת בסעיף ב ורשום את הפתרון הכללי של המערכת.

שאלה 8

נתונה מערכת משוואות מעל שדה הממשיים.

$$\begin{cases} x_1+(a-1)x_2-x_3=4 \\ ax_1+(a-1)x_2-x_3=a+3 \\ x_1+(a-1)x_2+(a-3)x_3=7 \end{cases}.$$

א. לאילו ערכים של a יש למערכת פתרון יחיד?

ב. לאילו ערכים של a אין פתרון למערכת?

ג. לאילו ערכים של a יש למערכת אינסוף פתרונות? במקרה זה מצא גם את הפתרון הכללי.

שאלה 9

עבור אילו ערכי k למערכת הבאה: א. אין פתרון

ב. יש פתרון יחיד

ג. אינסוף פתרונות

$$\begin{array}{l} x+2y+kz=-1 \\ x-3z=-3 \\ 2x+ky-z=-4 \end{array}$$

ד. הצב את הערך שקיבלת בסעיף ג ורשום את הפתרון הכללי של המערכת.

שאלה 10

נתונה מערכת משוואות ליניארית הומוגנית של m משוואות ו n נעלמים.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+\ldots+a_{2n}x_n=0 \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

א. הוכיחו שאם $c=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ הוא פתרון של המערכת, אזי לכל סקלר λ גם λc הוא פתרון.

ב. הוכיחו כי אם $c=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n), d=(\delta_1,\ldots,\delta_n)$ הם פתרונות של המערכת, אזי גם $c+d$ הוא פתרון של המערכת.

ג. הסיקו משני הסעיפים הקודמים כי אם $c=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n), d=(\delta_1,\ldots,\delta_n)$ הם פתרונות של המערכת ו λ_1,λ_2 הם סקלרים כלשהם, אזי גם $\lambda_1 c+\lambda_2 d$ הוא פתרון של המערכת.

ד. הוכיחו או הפריכו: תכונות א,ב,ג מתקיימות גם עבור מערכת משוואות ליניארית לא הומוגנית.