

כל הזכויות שמורות
 אין להעתיק או להעלות לאתר אחר
 זהבית צבי ©

פתרון תרגיל בית 4, גאומטריה אנליטית, מתרגלת: זהבית צבי

לכסון אורתוגונלי

$$1. \text{ נתונה המטריצה: } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ -2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

א. מצאו את הערכים עצמיים של A והריבוי האלגברי והגיאומטרי של כל ערך עצמי.
 ב. מצאו בסיס אורתונורמלי ל- \mathbb{R}^3 המורכב כולו מו"ע של המטריצה A .

פתרון א.

נמצא את הפולינום האופייני ונשווה לאפס: $|A - \lambda I| = 0$.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 6 \\ -2 & 4-\lambda & 3 \\ 6 & 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{R_1+R_2+R_3 \rightarrow R_1}{=} \begin{vmatrix} 5-\lambda & 5-\lambda & 5-\lambda \\ -2 & 4-\lambda & 3 \\ 6 & 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4-\lambda & 3 \\ 6 & 3 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{\substack{R_2+2R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3-6R_1 \rightarrow R_3}}{=} (5-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6-\lambda & 5 \\ 0 & -3 & -10-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda) \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6-\lambda & 5 \\ -3 & -10-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda) [-(6-\lambda)(10+\lambda) - (-3) \cdot 5]$$

$$= (5-\lambda)(-60-6\lambda+10\lambda+\lambda^2+15) = (5-\lambda)(\lambda^2+4\lambda-45) = (5-\lambda)(\lambda-5)(\lambda+9) = -(\lambda-5)^2(\lambda+9) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 5, \lambda_3 = -9$$

קיבלנו $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$ ערך עצמי בעל ריבוי אלגברי 2 ו- $\lambda_3 = -9$ ערך עצמי ללא ריבוי (בעל ריבוי אלגברי 1).
 כעת נחשב וקטורים עצמיים:

עבור $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$:

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 6 \\ -2 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 \end{pmatrix} \stackrel{\substack{R_1-2R_2 \rightarrow R_1 \\ R_3+3R_2 \rightarrow R_3}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad -2x - y + 3z = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z$$

נסמן את המשתנים החופשיים $y = t, z = s, t, s \in \mathbb{R}$ ונקבל מרחב עצמי של העי"ע $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$:

כל הזכויות שמורות
 אין להעתיק או להעלות לאתר אחר
 זהבית צבי ©

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t + \frac{3}{2}s \\ t \\ s \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t, s \in \mathbb{R}$$

נבחר שרירותית $t = 2, s = 0$ ונקבל מיד וקטור עצמי: $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

נבחר שרירותית $t = 0, s = 2$ ונקבל מיד $y = -3$ וקיבלנו וקטור עצמי: $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

בסה"כ הריבוי הגיאומטרי של העי"ע הכפול $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$ הוא 2.
עבור $\lambda_3 = -9$

$$\begin{pmatrix} 10 & -2 & 6 \\ -2 & 13 & 3 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 + 5R_2 \rightarrow R_1 \\ \rightarrow \\ R_3 + 3R_2 \rightarrow R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 63 & 21 \\ -2 & 13 & 3 \\ 0 & 42 & 14 \end{pmatrix} \begin{matrix} \frac{1}{21}R_1 \rightarrow R_1 \\ \rightarrow \\ \frac{1}{14}R_3 \rightarrow R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 13 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 - 3R_1 \rightarrow R_2 \\ \rightarrow \\ R_3 - R_1 \rightarrow R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3y + z = 0 \Rightarrow z = -3y, -2x + 4y = 0 \Rightarrow x = 2y$$

נבחר שרירותית $y = 1$ ונקבל $x = 2, z = -3$ וקיבלנו וקטור עצמי: $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. כאן ריבוי גיאומטרי 1.

בסה"כ המטריצה לכסינה (כצפוי, היא סימטרית!).
 ב.

נבצע תהליך גראם-שמידט (שלב אחד) על שני הוקטורים העצמים שקיבלנו עבור העי"ע עם ריבוי אלגברי
 $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$: 2

$$w_1 = v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} \cdot w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{(-1)^2 + 2^2 + 0^2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{3}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{6}{5} \\ 2 \end{pmatrix}$$

כל הזכויות שמורות
 אין להעתיק או להעלות לאתר אחר
 זהבית צבי ©

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} : \text{ננרמל את הוקטורים}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{56}} \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{5} \sqrt{\frac{5}{56}} \\ \frac{6}{5} \sqrt{\frac{5}{56}} \\ 2 \sqrt{\frac{5}{56}} \\ 2 \sqrt{\frac{5}{56}} \end{pmatrix} : \text{ומכאן } \|w_2\| = \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{\frac{56}{5}}$$

הו"ע השלישי אורתוגונלי מראש לשניים האלו, מכיוון שהו"ע שהתקבלו מע"ע שונים הם אורתוגונלים לפי משפט.

$$v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} : \text{ננרמל גם אותו}$$

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{14} \\ 1 \\ \sqrt{14} \\ 3 \\ -\sqrt{14} \end{pmatrix} : \text{הנורמה היא: } \|v_3\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{14} \text{ ומכאן הווקטור המנורמל:}$$

$$\{u_1, u_2, u_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{12}{5} \sqrt{\frac{5}{56}} \\ \frac{6}{5} \sqrt{\frac{5}{56}} \\ 2 \sqrt{\frac{5}{56}} \\ 2 \sqrt{\frac{5}{56}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} \\ -\frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} \right\} \text{ מכאן}$$

.2

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

מצאו מטריצה P אורתוגונלית כך ש- $P^T A P = D$.

פתרון

כל הזכויות שמורות
 אין להעתיק או להעלות לאתר אחר
 זהבית צבי ©

מציאת ע"ע:

נמצא פולינום אופייני ונשווה אותו לאפס:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 11-\lambda & -8 & 4 \\ -8 & -1-\lambda & -2 \\ 4 & -2 & -4-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{R_2+2R_3 \rightarrow R_2}{=} \begin{vmatrix} 11-\lambda & -8 & 4 \\ 0 & -5-\lambda & \underbrace{-10-2\lambda}_{=-2(-5-\lambda)} \\ 4 & -2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (-5-\lambda) \begin{vmatrix} 11-\lambda & -8 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{R_1+8R_2 \rightarrow R_1}{=} \stackrel{R_3+2R_2 \rightarrow R_3}{=} (-5-\lambda) \begin{vmatrix} 11-\lambda & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-5-\lambda) \underbrace{(-1)^{2+2}}_{=1} [-\lambda(11-\lambda) - 80] = 0$$

$$-(5+\lambda)(-11\lambda + \lambda^2 - 80) = 0$$

$$-(5+\lambda)(\lambda^2 - 11\lambda - 80) = 0$$

$$-(5+\lambda)(\lambda - 16)(\lambda + 5) = 0$$

$$\lambda_3 = -5 \quad \lambda_2 = -5 \quad \lambda_1 = 16 \quad \text{ע"ע:}$$

מציאת וקטורים עצמים:

עבור $\lambda_1 = 16$:

$$\begin{pmatrix} -5 & -8 & 4 & | & 0 \\ -8 & -17 & -2 & | & 0 \\ 4 & -2 & -20 & | & 0 \end{pmatrix} \stackrel{R_2-R_1 \rightarrow R_2}{\rightarrow} \begin{pmatrix} -5 & -8 & 4 & | & 0 \\ -3 & -9 & -6 & | & 0 \\ 2 & -1 & -10 & | & 0 \end{pmatrix} \stackrel{\left(\frac{1}{3}\right)R_2 \rightarrow R_2}{\rightarrow} \begin{pmatrix} -5 & -8 & 4 & | & 0 \\ 1 & 3 & 2 & | & 0 \\ 2 & -1 & -10 & | & 0 \end{pmatrix} \stackrel{R_1+5R_2 \rightarrow R_1}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 7 & 14 & | & 0 \\ 1 & 3 & 2 & | & 0 \\ 0 & -7 & -14 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{R_3+R_1 \rightarrow R_3}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 7 & 14 & | & 0 \\ 1 & 3 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \stackrel{\frac{1}{7}R_1 \rightarrow R_1}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 1 & 3 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \stackrel{R_2-R_1 \rightarrow R_2}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

כל הזכויות שמורות
 אין להעתיק או להעלות לאתר אחר
 זהבית צבי ©

$$\begin{aligned} z &= t \\ y + 2t &= 0 \\ y &= -2t \\ x + 2y &= 0 \\ x &= -2y \\ x &= 4t \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 4t \\ -2t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

עבור $\lambda = -5$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 16 & -8 & 4 & 0 \\ -8 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1+2R_2 \rightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2+2R_3 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} z &= t \\ y &= s \\ 4x - 2s + t &= 0 \\ 4x &= 2s - t \\ x &= \frac{s}{2} - \frac{t}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{s}{2} - \frac{t}{4} \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

נבחר : $t = 2$
 $s = 1$

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

נבחר : $t = -4$
 $s = 0$

כל הזכויות שמורות
 אין להעתיק או להעלות לאתר אחר
 זהבית צבי ©

הערה: כיוון שהמטריצה סימטרית בהכרח היא לכסינה אורתוגונלית לפי משפט, לכן אנחנו חיבים למצוא מס' וקטורים עצמים זהה לריבוי האלגברי שלהם.

נקבל שני וקטורים:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

נשים לב שהם לא אורתוגונלים.
 נפעיל תהליך של גראם שמידט:
 נסמן:

$$\vec{w}_1 = \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\langle \vec{v}_2, \vec{w}_1 \rangle}{\|\vec{w}_1\|^2} \vec{w}_1$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} - \frac{-8}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{8}{5} \\ \frac{16}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{8}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

נכפול אותו פי 5 ונקבל:

כל הזכויות שמורות
 אין להעתיק או להעלות לאתר אחר
 זהבית צבי ©

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

ננרמל אותם :

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{105}} \\ \frac{8}{\sqrt{105}} \\ -\frac{4}{\sqrt{105}} \end{pmatrix}$$

נקבל u_1, u_2 אורתונורמלים הם כבר אורתוגונלים ל- v_1 (כי ע"ע שונים).
 ננרמל את v_1 בכדי לקבל את P שתהיה אורתוגונלית (עמודות אורתונורמליות):

כל הזכויות שמורות
 אין להעתיק או להעלות לאתר אחר
 זהבית צבי ©

$$\vec{u}_3 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{21}} \\ -\frac{2}{\sqrt{21}} \\ \frac{1}{\sqrt{21}} \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{\sqrt{105}} & \frac{4}{\sqrt{21}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{8}{\sqrt{105}} & -\frac{2}{\sqrt{21}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-4}{\sqrt{105}} & \frac{1}{\sqrt{21}} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

3. בכל אחד מהסעיפים הבאים מצאו מטריצה אורתוגונלית P ומטריצה אלכסונית D כך ש- $P^t A P = D$:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{ד.} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ג.} \quad A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{ב.} \quad A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{א.}$$

פתרון

א. המטריצה הנתונה היא סימטרית, $A^t = A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$ ולכן בהכרח לכסינה אורתוגונלית.

תחילה נמצא ערכים עצמיים:

נמצא את הפולינום האופיני ונשווה לאפס: $|A - \lambda I| = 0$:

כל הזכויות שמורות
 אין להעתיק או להעלות לאתר אחר
 זהבית צבי ©

$$f_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 11-\lambda & 2 & -8 \\ 2 & 2-\lambda & 10 \\ -8 & 10 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (11-\lambda)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 10 \\ 10 & 5-\lambda \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 10 & 5-\lambda \end{vmatrix} - 8(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 2-\lambda & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= (11-\lambda)[(2-\lambda)(5-\lambda)-100] - 2(10-2\lambda+80) - 8(20+16-8\lambda) =$$

$$(11-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda - 90) - 180 + 4\lambda - 288 + 64\lambda = -\left(\lambda^3 - 18\lambda^2 - 81\lambda + \frac{1458}{18 \cdot 81}\right) = 0$$

מכאן נקבל:

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 - 81\lambda + \frac{1458}{18 \cdot 81} = (\lambda^3 - 81\lambda) - (18\lambda^2 - 18 \cdot 81) = \lambda(\lambda^2 - 81) - 18(\lambda^2 - 81)$$

$$= (\lambda^2 - 81)(\lambda - 18) = (\lambda - 9)(\lambda + 9)(\lambda - 18) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 9, \lambda_2 = -9, \lambda_3 = 18$$

ערכים עצמים שונים, לכן נקבל מכאן 3 ו"ע בת"ל. לפי משפט, מכיוון שהמטריצה סימטרית, הווקטורים העצמים הללו יהיו אורתוגונלים.

נפתור את המערכת $(A - \lambda I)v = 0$ עבור כל λ_i שמצאנו קודם.

עבור $\lambda_1 = 9$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 2 & -7 & 10 \\ -8 & 10 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} R_3+4R_1 \rightarrow R_3 \\ R_2-R_1 \rightarrow R_2 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} R_2-R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3+4R_1 \rightarrow R_3 \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 0 & -9 & 18 \\ 0 & 18 & -36 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} R_3+2R_2 \rightarrow R_3 \\ \frac{1}{2}R_1 \rightarrow R_1 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} \frac{1}{2}R_1 \rightarrow R_1 \\ R_3+2R_2 \rightarrow R_3 \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & -9 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} R_1-R_2 \rightarrow R_1 \\ \frac{1}{9}R_2 \rightarrow R_2 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} \frac{1}{9}R_2 \rightarrow R_2 \\ R_1-R_2 \rightarrow R_1 \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ומכאן מקבלים: $x - 2z = 0 \Rightarrow x = 2z$
 $y - 2z = 0 \Rightarrow y = 2z$
 נבחר $z = 1$ ואז $x = y = 2$. נקבל ווקטור עצמי: $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

ננרמל אותו: $\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$ ולכן ו"ע מנורמל: $u_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

עבור $\lambda_2 = -9$

כל הזכויות שמורות
 אין להעתיק או להעלות לאתר אחר
 זהבית צבי ©

$$\begin{pmatrix} 20 & 2 & -8 \\ 2 & 11 & 10 \\ -8 & 10 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 - 10R_2 \rightarrow R_1 \\ R_3 + 4R_2 \rightarrow R_3}} \begin{pmatrix} 0 & -108 & -108 \\ 2 & 11 & 10 \\ 0 & 54 & 54 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 2 & 11 & 10 \\ 0 & -108 & -108 \\ 0 & 54 & 54 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 + 2R_3 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 2 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 54 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\frac{1}{2}R_1 \rightarrow R_1 \\ \frac{1}{54}R_3 \rightarrow R_3}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{11}{2} & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 - \frac{11}{2}R_3 \rightarrow R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ומכאן מקבלים: $x - \frac{1}{2}z = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}z$. נבחר $z = 1$ ואז $y = -1$, $x = \frac{1}{2}$. נקבל ווקטור עצמי: $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 $y + z = 0 \Rightarrow y = -z$

ננרמל אותו: $\left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \frac{3}{2}$ ולכן ו"ע מנורמל: $u_2 = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

עבור $\lambda_3 = 18$:

$$\begin{pmatrix} -7 & 2 & -8 \\ 2 & -16 & 10 \\ -8 & 10 & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + 4R_2 \rightarrow R_3} \begin{pmatrix} -7 & 2 & -8 \\ 2 & -16 & 10 \\ 0 & -54 & 27 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\frac{1}{2}R_2 \rightarrow R_2 \\ -\frac{1}{54}R_3 \rightarrow R_3}} \begin{pmatrix} -7 & 2 & -8 \\ 1 & -8 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 + 7R_2 \rightarrow R_1} \begin{pmatrix} 0 & -54 & 27 \\ 1 & -8 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 + 54R_3 \rightarrow R_1 \\ R_2 + 8R_3 \rightarrow R_2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ומכאן מקבלים: $y - \frac{1}{2}z = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}z$. נבחר $z = 1$ ואז $x = -1$, $y = \frac{1}{2}$. נקבל ווקטור עצמי: $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.
 $x + z = 0 \Rightarrow x = -z$

ננרמל אותו: $\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{3}{2}$ ולכן ו"ע מנורמל: $\frac{2}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

כל הזכויות שמורות
 אין להעתיק או להעלות לאתר אחר
 זהבית צבי ©

לפי משפט הוייע המנורמלים מהווים בסיס אורתונורמלי ל- \mathbb{R}^3 ומכאן מטריצה

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

היא המלכסנת האורתוגונלית, המטריצה האלכסונית הדומה היא $D = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$ ומתקיים:

$$P^T A P = D$$

ב. המטריצה הנתונה היא סימטרית, $A^T = A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ ולכן בהכרח לכסינה אורתוגונלית.

תחילה נמצא ערכים עצמיים:

נמצא את הפולינום האופיני ונשווה לאפס: $|A - \lambda I| = 0$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -5-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -5-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{R_1+R_2+R_3 \rightarrow R_1}{=} \begin{vmatrix} -3-\lambda & -3-\lambda & -3-\lambda \\ 1 & -5-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -5-\lambda \end{vmatrix} = -(3+\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{R_2-R_1 \rightarrow R_2}{=} -(3+\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -5-\lambda \end{vmatrix} = -(3+\lambda) \cdot [-(6+\lambda)] \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3+\lambda)(6+\lambda)(-5-\lambda-1) = -(3+\lambda)(6+\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3, \lambda_2 = \lambda_3 = -6$$

נמצא וייע באמצעות פתרון המערכת $(A - \lambda I)v = 0$ עבור כל λ_i שמצאנו קודם.

עבור $\lambda_1 = -3$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+2R_3 \rightarrow R_1} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+R_2 \rightarrow R_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}R_2 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2 \rightarrow R_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ומכאן מקבלים: $x - z = 0 \Rightarrow x = z$
 $y - z = 0 \Rightarrow y = z$
 נבחר $z = 1$ ואז $x = y = 1$. נקבל וקטור עצמי: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

כל הזכויות שמורות
אין להעתיק או להעלות לאתר אחר
זהבית צבי ©

$$. u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad \text{ולכן וייע מנורמל:} \quad \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

עבור $\lambda_2 = \lambda_3 = -6$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 - R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 - R_1 \rightarrow R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ומכאן מקבלים: $x + y + z = 0 \Rightarrow x = -y - z$

נסמן את המשתנים החופשיים $y = t, z = s, t, s \in \mathbb{R}$ ונקבל מרחב עצמי של העייע $\lambda_2 = \lambda_3 = -6$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t - s \\ t \\ s \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t, s \in \mathbb{R}$$

$$. v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{נבחר שרירותית } t = 0, s = 1 \text{ וקיבלנו וקטור עצמי:}$$

$$. v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{נבחר שרירותית } t = 1, s = 0 \text{ ונקבל מיד וקטור עצמי:}$$

נבצע תהליך גראם-שמידט (שלב אחד) על שני הוקטורים העצמים שקיבלנו עבור העייע עם ריבוי אלגברי 2: $\lambda_2 = \lambda_3 = -6$.

$$w_2 = v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} \cdot w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

כל הזכויות שמורות
אין להעתיק או להעלות לאתר אחר
זהבית צבי ©

$$.u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} : \text{ננרמל את הוקטורים}$$

$$.u_3 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} : \text{ומכאן } \|w_3\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

הוקטורים $u_i, i=1,2,3$ הם בסיס אורתונורמלי של ו"ע של מטריצה A .

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \text{ לכן המטריצה המלכסנת אורתוגונלית היא } P \text{ והאלכסונית הדומה היא :}$$

$$.D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

הערה: אפשר לכפול את w_3 ב-2 בכדי "להפטר מהשברים" ולאחר מכן לנרמל. מגיעים בדיוק לאותה תשובה.

$$.g. \text{ המטריצה הנתונה היא סימטרית, } A' = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ ולכן בהכרח לכסינה אורתוגונלית.}$$

תחילה נמצא ערכים עצמיים :

$$: |A - \lambda I| = 0 \text{ נמצא את הפולינום האופייני ונשווה לאפס :}$$

כל הזכויות שמורות
 אין להעתיק או להעלות לאתר אחר
 זהבית צבי ©

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{R_1+R_2+R_3 \rightarrow R_1}{=} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4-\lambda & 4-\lambda \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{R_2-R_1 \rightarrow R_2}{=} (4-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) \cdot (1-\lambda) \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda-1) = (4-\lambda)(1-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

נמצא ו"ע באמצעות פתרון המערכת $(A - \lambda I)v = 0$ עבור כל λ_i שמצאנו קודם.

עבור $\lambda_1 = 4$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1+2R_3 \rightarrow R_1 \\ \rightarrow \\ R_2-R_3 \rightarrow R_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1+R_2 \rightarrow R_1 \\ \rightarrow \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \frac{1}{3}R_2 \rightarrow R_2 \\ \rightarrow \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_3-R_2 \rightarrow R_3 \\ \rightarrow \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ומכאן מקבלים: $x - z = 0 \Rightarrow x = z$
 $y - z = 0 \Rightarrow y = z$
 נבחר $z = 1$ ואז $x = y = 1$. נקבל ווקטור עצמי: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \text{ : ננרמל אותו : } \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

ולכן ו"ע מנורמל:

עבור $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2-R_1 \rightarrow R_2 \\ \rightarrow \\ R_3-R_1 \rightarrow R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ומכאן מקבלים: $x + y + z = 0 \Rightarrow x = -y - z$

נסמן את המשתנים החופשיים $y = t, z = s, t, s \in \mathbb{R}$ ונקבל מרחב עצמי של הע"ע $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t-s \\ t \\ s \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t, s \in \mathbb{R}$$

כל הזכויות שמורות
 אין להעתיק או להעלות לאתר אחר
 זהבית צבי ©

$$\cdot v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \text{נבחר שרירותית } t=0, s=1 \text{ וקיבלנו וקטור עצמי:}$$

$$\cdot v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \text{נבחר שרירותית } t=1, s=0 \text{ ונקבל מיד וקטור עצמי:}$$

נבצע תהליך גראם-שמידט (שלב אחד) על שני הוקטורים העצמיים שקיבלנו עבור העי"ע עם ריבוי אלגברי $\lambda_2 = \lambda_3 = 1 : 2$.

$$w_2 = v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} \cdot w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\cdot u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} : \text{ננרמל את הוקטורים:}$$

$$\cdot u_3 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} : \text{ומכאן } \|w_3\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

הווקטורים $u_i, i=1,2,3$ הם בסיס אורתונורמלי של ו"ע של מטריצה A.

הווקטורים $u_i, i=1,2,3$ הם בסיס אורתונורמלי של ו"ע של מטריצה A.

כל הזכויות שמורות
 אין להעתיק או להעלות לאתר אחר
 זהבית צבי ©

לכן המטריצה המלכסנת אורתוגונלית היא $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$ והאלכסונית הדומה היא :

$$. D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ד. המטריצה הנתונה היא סימטרית, $A^t = A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ ולכן בהכרח לכסינה אורתוגונלית.

תחילה נמצא ערכים עצמיים :

נמצא את הפולינום האופייני ונשווה לאפס : $|A - \lambda I| = 0$:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -4 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & -4 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & -4 - \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{R_1 + R_2 + R_3 \rightarrow R_1} \begin{vmatrix} -2 - \lambda & -2 - \lambda & -2 - \lambda \\ 1 & -4 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = -(2 + \lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & -4 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 - R_1 \rightarrow R_2} -(2 + \lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 - \lambda & 0 \\ 1 & 1 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = -(2 + \lambda) \cdot [-(5 + \lambda)] \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2 + \lambda)(5 + \lambda)(-4 - \lambda - 1) = -(2 + \lambda)(5 + \lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = \lambda_3 = -5$$

נמצא ו"ע באמצעות פתרון המערכת $(A - \lambda I)v = 0$ עבור כל λ_i שמצאנו קודם.

עבור $\lambda_1 = -2$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_1 + 2R_3 \rightarrow R_1 \\ R_2 - R_3 \rightarrow R_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 + R_2 \rightarrow R_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}R_2 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2 \rightarrow R_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ומכאן מקבלים : $x - z = 0 \Rightarrow x = z$
 $y - z = 0 \Rightarrow y = z$
 נבחר $z = 1$ ואז $x = y = 1$. נקבל ווקטור עצמי : $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

כל הזכויות שמורות
 אין להעתיק או להעלות לאתר אחר
 זהבית צבי ©

$$. u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} : \text{ולכן וייע מנורמל: } \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

עבור $\lambda_2 = \lambda_3 = -5$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 - R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 - R_1 \rightarrow R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ומכאן מקבלים: $x + y + z = 0 \Rightarrow x = -y - z$

נסמן את המשתנים החופשיים $y = t, z = s, t, s \in \mathbb{R}$ ונקבל מרחב עצמי של העייע $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t - s \\ t \\ s \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{R}$$

$$. v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \text{נבחר שרירותית } t = 0, s = 1 \text{ וקיבלנו וקטור עצמי:}$$

$$. v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \text{נבחר שרירותית } t = 1, s = 0 \text{ ונקבל מיד וקטור עצמי:}$$

נבצע תהליך גראם-שמידט (שלב אחד) על שני הוקטורים העצמים שקיבלנו עבור העייע עם ריבוי אלגברי

2: $\lambda_2 = \lambda_3 = -5$.

$$w_2 = v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} \cdot w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

כל הזכויות שמורות
 אין להעתיק או להעלות לאתר אחר
 זהבית צבי ©

$$.u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} : \text{ננרמל את הוקטורים}$$

$$.u_3 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} : \text{ומכאן } \|w_3\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

הווקטורים $u_i, i=1,2,3$ הם בסיס אורתונורמלי של וייע של מטריצה A .

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \text{ והאלכסונית הדומה היא :}$$

לכן המטריצה המלכסנת אורתוגונלית היא

$$.D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$