סמסטר א' תשע"ה, אלעד עטייא

אינפי 3 - תרגול 1

תזכורת - *מכפלה פנימית*:

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. פונקציה $\langle\cdot,\cdot\rangle:V\times V\to\mathbb{F}$ תיקרא *מכפלה פנימית* מעל המרחב אם היא מקיימת את התכונות הבאות:

1) ליניאריות ברכיב הראשון:
$\langle\alpha u+\beta v,w\rangle=\alpha\langle u,w\rangle+\beta\langle v,w\rangle$ לכל $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ ולכל $u,v,w\in V$.

2) הרמיטיות:
$\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}$ לכל $u,v\in V$.

3) אי-שליליות:
$\langle v,v\rangle\geq 0$ לכל $v\in V$, ו - $v=0\Leftrightarrow\langle v,v\rangle=0$.

מרחב שעליו מוגדרת מכפלה פנימית נקרא *מרחב מכפלה פנימית*.

<u>לדוגמה:</u>

א. המכפלה הפנימית הסטנדרטית על $\mathbb{R}^n$, $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=\sum_{i=1}^{n}u_iv_i$; המכפלה הפנימית הסטנדרטית על $\mathbb{C}^n$, $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=\sum_{i=1}^{n}u_i\overline{v_i}$.

ב. במרחב המשתנים המקריים (במרחב הסתברות מסוים), $COV(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$ היא מכפלה פנימית.

ג. במרחב הפונקציות הרציפות בקטע I, $C[I]$, $\langle f,g\rangle=\int_I f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$ היא מכפלה פנימית.

ד. עבור שתי מטריצות מאותו הסדר A,B, $tr(B^tA)$ מהווה מכפלה פנימית.

<u>הגדרה - נורמה:</u>

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. פונקציה $\|\ \|:V\to\mathbb{R}$ תיקרא *נורמה*, אם היא מקיימת את התכונות הבאות:

1) אי-שליליות:
$\|u\|\geq 0$ לכל $u\in V$, ו - $u=0\Leftrightarrow\|u\|=0$.

2) הומוגניות:
$\|\lambda u\|=|\lambda|\cdot\|u\|$ לכל $u\in V$ ולכל $\lambda\in\mathbb{F}$.

3) אי-שוויון המשולש:
$\|u+v\| \le \|u\|+\|v\|$ לכל $u,v \in V$.

מרחב שעליו מוגדרת נורמה נקרא *מרחב נורמי*.

<u>לדוגמה:</u>

בהינתן מרחב מכפלה פנימית, *הנורמה המושרית* ע"י המכפלה הפנימית היא: $\|v\| = \sqrt{\langle v,v \rangle}$.

<u>משפט:</u>

נורמה מושרית ע"י מכפלה פנימית אם ורק אם היא מקיימת את השוויון:
$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$ לכל $u,v \in V$. שוויון זה נקרא *שוויון המקבילית*.

<u>תרגיל:</u>

ב - $C[0,1]$ (מרחב כל הפונקציות הרציפות בקטע $[0,1]$) נגדיר: $\|f\|_{\max} = \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$. הראו שזו נורמה.

<u>פתרון:</u>

נראה שהפונקציה מקיימת את שלוש התכונות של נורמה.

1) ערך מוחלט הוא אי-שלילי ולכן הפונקציה אי-שלילית. אם $f(x)=0$ אז המקסימום שלה הוא 0; לכיוון השני, המקסימום הוא 0 ולכן לכל $x \in [0,1]$, $0 \le |f(x)| \le 0$ ולכן $f(x)=0$.

2) $\|\lambda f\| = \max\limits_{x\in[0,1]} |\lambda f(x)| = |\lambda| \cdot \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

3) $\|f+g\| = \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)+g(x)| \le \max\limits_{x\in[0,1]} \{|f(x)|+|g(x)|\} \le \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| + \max\limits_{x\in[0,1]} |g(x)| = \|f\|+\|g\|$

המעבר השני ב - 3) נובע מאי שוויון המשולש עבור ערכים מוחלטים.

<u>תרגיל:</u>

הראו שנורמת המקסימום במרחב $C[0,1]$ אינה מושרית ממכפלה פנימית.

<u>פתרון:</u>

כדי להראות שנורמת המקסימום אינה מושרית מאף מכפלה פנימית, נפריך את שיוויון המקבילית.

לכן, נחפש פונקציות שלא יקיימו את שיוויון המקבילית לפי נורמת המקסימום.

נתבונן בפונקציות $f(x)=x, g(x)=1-x$ בקטע $[0,1]$. $\|f\|=\|g\|=1$, אך:

$\|f+g\| = \|x+1-x\| = \|1\| = 1$ ו - $\|f-g\| = \|x-(1-x)\| = \|2x-1\| = 1$ (קל לראות זאת בשרטוט) ולכן: $\|f-g\|^2 + \|f+g\|^2 = 1^2+1^2 = 2 \ne 4 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2$.

<u>דוגמאות נוספות לנורמות:</u>

א. *נורמת* L_p ב - $\mathbb{R}^n$ מוגדרת ע"י:

$\|u\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|\right)^{\frac{1}{p}}$, כאשר $p \geq 1$.

ב. בהינתן שני מרחבים נורמיים A, B , *נורמת האופרטור* על המרחב $Hom(A, B)$ המסומנת $\|T\|$ היא הסופרימום של הנורמות $\|T(x)\|_B$ כאשר $x \in A$ וקטור יחידה (שהנורמה שלו שווה ל-1).

<u>תרגיל:</u>

האם הפונקציה הבאה היא נרומה במרחב $C[a,b]$?

$\| f \| = V_a^b(f)$ (ההשתנות החסומה של f בקטע, המוגדרת ע"י:

$V_a^b(f) = \sup_T \{v(f,T)\}$, כאשר $v(f,T) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$ ההשתנות של הפונקציה f לפי החלוקה T).

<u>פתרון:</u>

לא! התכונה $f = 0 \Leftrightarrow \| f \| = 0$ לא מתקיימת, מכיוון שההשתנות החסומה של כל פונקציה קבועה שאינה 0 היא 0.

<u>משפט - אי שוויון קושי-שוורץ:</u>

יהי V מרחב מכפלה פנימית, אזי לכל $u, v \in V$ מתקיים: $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ כאשר הנורמה היא הנורמה המושרית מהמכפלה הפנימית.

<u>תרגיל:</u>

הראו שבמרחבים נורמיים בהם הנורמה מושרית ממכפלה פנימית, אי שוויון המשולש נובע מאי שוויון קושי שוורץ.

<u>פתרון:</u>

$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$, ולכן: $2|\langle u, v\rangle| \leq 2\|u\| \cdot \|v\|$. נוסיף לשני האגפים $\|u\|^2 + \|v\|^2$ ונקבל:

$\|u\|^2 + 2|\langle u, v\rangle| + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2 : \mathrm{I}$.

כעת, $\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle$ לפי הגדרת הנורמה, ולכן מתקיים:

$$\langle u+v, u+v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle = \|v\|^2 + \langle u, v\rangle + \overline{\langle u, v\rangle} + \|u\|^2$$

$$= \|u\|^2 + 2Re\langle u, v\rangle + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2|\langle u, v\rangle| + \|v\|^2 =$$

ולכן לפי I נקבל ש: $\|v\|^2$ $\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle \le \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2$, כלומר

$(\|u\|+\|v\|)^2$ $\|u+v\|^2 \le (\|u\|+\|v\|)^2$; אם נוציא שורש משני האגפים נקבל: $\|u+v\| \le \|u\|+\|v\|$ כנדרש.