פתרון תרגיל 1 אינפי 3 תשעו

9 בנובמבר 2015

1. נוכיח: $\|\|u\|-\|v\|\| \le \|u-v\|$. אי־השוויון השני נובע ממנו:

$$\|\|u\|-\|v\|\| = \|\|u\|-\|-v\|\| \le \|u-(-v)\| = \|u+v\|$$

אם כן, נשים לב לכך ש: $u = v + (u-v)$ ולכן לפי אי־שוויון המשולש:

$$\|u\| \le \|v\| + \|u-v\| \Longrightarrow \|u\| - \|v\| \le \|u-v\|$$

מאותה הסיבה, $\|v\|-\|u\| \le \|v-u\|$, אך $\|u-v\| = \|v-u\|$ולכן:

$$\|u-v\| \ge \max\left\{\|v\|-\|u\|, \|u\|-\|v\|\right\} = \|\|u\|-\|v\|\|$$

והוכחנו את הדרוש. מאי־השוויון נקבל:

$$0 \le \|u_n\| - \|u\| \le \|u_n - u\| \to 0$$

ולכן לפי כלל הסנדוויץ', $\|u_n\| - \|u\| \to 0$ כלומר אכן:

$$\|u_n\| \to \|u\|$$

2. נתבונן במרחב הוקטורי $span\left\{x_1 \ldots, x_n, x\right\}$. נסמן את המימד של המרחב ב־k.
אם x תלוי ליניארית ב־$x_1, \ldots, x_n$, המימד הוא n ואם לא אז המימד הוא $n+1$
(קבוצה אורתונורמלית היא בת"ל).

בכל אופן, $k \geq n$, ונעבור מ־n ל־k.

לפי גרם־שמידט נעבור לבסיס אורתונורמלי: $\{x_1, \ldots, x_k\}$(כל האיברים זהים לאיברים הקודמים למעט אחד שאולי נוסף).

נציג את x כצירוף ליניארי של איברי הבסיס: $x = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i$.

כעת, לפי הליניאריות:

$$\|x\|^2 = |\langle x, x\rangle|^2 \left| \left\langle \sum_{i=1}^{k} a_i x_i, \sum_{j=1}^{k} a_j x_j \right\rangle \right|^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} |a_i a_j \langle x_i, x_j\rangle|$$

מהאורתונורמליות,

$$\langle x_i, x_j\rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

ולכן:

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{k} |a_i|^2$$

אך מי הם a_i? לפי ליניאריות:

$$a_i = \sum_{j=1}^{k} a_j \langle x_i, x_j\rangle = \left\langle x, \sum_{j=1}^{k} a_j x_j \right\rangle = \langle x_i, x\rangle$$

ולכן:

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{k} |a_i|^2 \geq \sum_{i=1}^{k} a_i^2 \geq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, x\rangle$$

שהרי $k \geq n$.

3. נבדוק האם התכונות מתקיימות.

(א) הפונקציה השנייה אינה נורמה, מכיוון שאי־שליליות אינה מתקיימת; איבר האפס במרחב $X \times Y$ הוא $(0_X, 0_Y)$ולכן איבר מהצורה $(x, 0_Y)$כאשר $x \neq 0_X$ אינו איבר האפס, אך מקיים:

$$\|(x, 0_Y)\|_2 = \|x\|_X \cdot \|0_Y\|_Y = \|x\|_X \cdot 0 = 0$$

אפשר לדייק יותר; רק כאשר שני המרחבים הם טריוויאליים, $X = Y = \{0\}$, זוהי אכן נורמה.

(ב) הפונקציות הראשונה והשלישית הן אכן נורמות; נראה זאת.

i. אי־שליליות: מכיוון שלכל $(x,y)\in X\times Y$, $\|x\|_X,\|y\|_Y\geq 0$, נקבל:

$$\|(x,y)\|_1=\|x\|_X+\|y\|_Y\geq 0,\|(x,y)\|_3=\max\{\|x\|_X,\|y\|_Y\}\geq 0$$

כעת,

$$(x,y)=(0,0)\Longrightarrow\|x\|_X,\|y\|_Y=0\Longrightarrow\|(x,y)\|_3,\|(x,y)\|_1=0$$

לצד שני, אם $(x,y)\neq(0,0)$אז בה"כ $x\neq 0$ ואז $\|x\|_X>0$ ולכן גם:

$$\|(x,y)\|_3,\|(x,y)\|_1>0$$

וסה"כ אי־שליליות מתקיימת עבור שתי הנורמות.

ii. הומוגניות:

$$\|\lambda(x,y)\|_1=\|(\lambda x,\lambda y)\|_1=\|\lambda x\|_X+\|\lambda y\|_Y=|\lambda|\cdot\|x\|_X+|\lambda|\cdot\|y\|_Y=|\lambda|\cdot\|(x,y)\|_1$$

כמו כן:

$$\|\lambda(x,y)\|_3=\|(\lambda x,\lambda y)\|_3=\max\{\|\lambda x\|_X,\|\lambda y\|_Y\}=\max\{|\lambda|\cdot\|x\|_X,|\lambda|\cdot\|y\|_Y\}=|\lambda|\cdot\|(x,y)\|_3$$

ולכן הומוגניות מתקיימת.

iii. א"ש המשולש:

$$\|(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\|_1=\|(x_1+x_2,y_1+y_2)\|_1=\|x_1+x_2\|_X+\|y_1+y_2\|_Y\leq$$

$$\leq\|x_1\|_X+\|x_2\|_X+\|y_1\|_Y+\|y_2\|_Y=\|(x_1,y_1)\|_1+\|(x_2,y_2)\|_1$$

וכן:

$$\|(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\|_3=\|(x_1+x_2,y_1+y_2)\|_3=\max\{\|x_1+x_2\|_X,\|y_1+y_2\|_Y\}\leq$$

$$\leq\max\{\|x_1\|_X,\|y_1\|_Y\}+\max\{\|x_2\|_X,\|y_2\|_Y\}=\|(x_1,y_1)\|_3+\|(x_2,y_2)\|_3$$

אי־השוויון נובע מכך ש:

$$\|x_1+x_2\|_X \leq \|x_1\|_X+\|x_2\|_X \leq \max\{\|x_1\|_X, \|y_1\|_Y\}+\max\{\|x_2\|_X, \|y_2\|_Y\}$$

וגם:

$$\|y_1+y_2\|_Y \leq \|y_1\|_Y+\|y_2\|_Y \leq \max\{\|x_1\|_X, \|y_1\|_Y\}+\max\{\|x_2\|_X, \|y_2\|_Y\}$$

ואם כן הוכחנו את שלוש התכונות הנדרשות עבור כל אחת מהפונקציות.

4. נשתמש בתכונות המכפלה הפנימית ב$-\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2\right)=\frac{1}{4}\left(\langle u+v,u+v\rangle-\langle u-v,u-v\rangle\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\langle u,u+v\rangle+\langle v,u+v\rangle-\langle u,u-v\rangle-\langle -v,u-v\rangle\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\langle u,u+v\rangle+\langle v,u+v\rangle+\langle u,v-u\rangle+\langle v,u-v\rangle\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\langle u,u+v+v-u\rangle+\langle v,u+v+u-v\rangle\right)=\frac{1}{4}\left(\langle u,2v\rangle+\langle v,2u\rangle\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(2\langle u,v\rangle+2\langle v,u\rangle\right)=\frac{1}{4}\left(2\langle u,v\rangle+2\langle u,v\rangle\right)=\langle u,v\rangle$$

ב$-\mathbb{C}$, כל השוויונות למעט האחרון עדיין תקפים, ולכן:

$$\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2\right)=\frac{1}{4}\left(2\langle u,v\rangle+2\langle u,v\rangle\right)=\frac{1}{4}\left(2\langle u,v\rangle+2\overline{\langle u,v\rangle}\right)$$

כמו כן:

$$\langle u,v\rangle=\frac{1}{4}\left(i\|u+iv\|^2-i\|u-iv\|^2\right)=\frac{i}{4}\left(\|u+iv\|^2-\|u-iv\|^2\right)=$$

$$=\frac{i}{2}\left(\langle u,iv\rangle+\overline{\langle u,iv\rangle}\right)=\frac{i}{2}\left(-i\langle u,v\rangle+i\overline{\langle u,v\rangle}\right)=\frac{1}{2}\left(\langle u,v\rangle-\overline{\langle u,v\rangle}\right)$$

ולכן:

$$\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2+i\|u+vi\|^2-i\|u-vi\|^2\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(2\langle u,v\rangle+2\overline{\langle u,v\rangle}\right)+\frac{1}{2}\left(\langle u,v\rangle-\overline{\langle u,v\rangle}\right)=\langle u,v\rangle$$

והוכחנו את הדרוש.

5. נבדוק שהמכפלה הפנימית משרה את הנורמה, ושתכונות המכפלה הפנימית מתקיימות.

(א) מתקיים:

$$\langle u,u\rangle=\frac{1}{4}\left(\|u+u\|^2-\|u-u\|^2\right)=\frac{1}{4}\left(\|2u\|^2-\|0\|^2\right)=\frac{1}{4}\left(4\|u\|^2\right)=\|u\|^2$$

ולכן הנורמה אכן מושרית מהמכפלה הפנימית (אם היא אכן כזו).

(ב) לפי חוקי הנורמה, $\langle u,u\rangle=\|u\|^2\geq 0$ וגם:

$$u=0\iff\|u\|=0\iff\langle u,u\rangle=\|u\|^2=0$$

ולכן אי־שליליות מתקיימת.

(ג) סימטריות (אנחנו מעל $\mathbb{R}$) היא טריוויאלית:

$$\langle u,v\rangle=\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2\right)=\frac{1}{4}\left(\|v+u\|^2-\|v-u\|^2\right)=\langle v,u\rangle$$

(ד) נראה שמתקיימת אדיטיביות, כלומר: $\langle u+v,w\rangle=\langle u,w\rangle+\langle v,w\rangle$. נכפיל הכל ב־$8$ כדי לא להתעסק עם שברים, ואנו צריכים להוכיח את השוויון השקול:

$$8\langle u+v,w\rangle-8\langle u,w\rangle-8\langle v,w\rangle=0$$

מהגדרת הפונקציה:

$$=2\|u+v+w\|^2-2\|u+v-w\|^2-2\|u+w\|^2+2\|u-w\|^2-2\|v+w\|^2+2\|v-w\|^2=$$

לפי שוויון המקבילית:

$$2\left(\|u\pm w\|^2+\|v\pm w\|^2\right)=\|u+v\pm 2w\|^2+\|u-v\|^2$$

ולכן הביטוי שלנו שווה ל:

$$2\|u+v+w\|^2-2\|u+v-w\|^2+\|u+v-2w\|^2+\|u-v\|^2-\|u+v+2w\|^2-\|u-v\|^2=$$

$$=2\|u+v+w\|^2-2\|u+v-w\|^2+\|u+v-2w\|^2-\|u+v+2w\|^2=$$

$$=\left(\|u+v-2w\|^2-2\|u+v-w\|^2\right)-\left(2\|u+v+w\|^2-\|u+v+2w\|^2\right)$$

שוב, לפי שוויון המקבילית:

$$2\left(\|u+v\pm w\|^2+\|\pm w\|^2\right)=\|u+v\pm 2w\|^2+\|u+v\|^2$$

וזה שקול ל:

$$\|u+v\pm 2w\|^2-2\|u+v\pm w\|^2=2\|\pm w\|^2-\|u+v\|^2$$

ולכן הביטוי שלנו שווה ל:

$$\left(2\|w\|^2-\|u+v\|^2\right)-\left(2\|-w\|^2-\|u+v\|^2\right)=0$$

ולכן אדיטיביות מתקיימת.

(ה) נוכיח מולטיפלטיביות, כלומר $\langle au,v\rangle=a\langle u,v\rangle$ נעשה זאת בשלבים.

i. ראשית, נוכיח באינדוקציה שהטענה נכונה לכל n טבעי. עבור $n=1$,

$$\langle 1\cdot u,v\rangle=\langle u,v\rangle=1\cdot\langle u,v\rangle$$

ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$. נניח שהטענה נכונה עבור $a-1$:

$$(a-1)\langle u,v\rangle=\langle (1-a)u,v\rangle$$

ונוכיח שהטענה נכונה עבור a:

$$\langle au,v\rangle = \langle (a-1+1)\,u,v\rangle = \langle (a-1)\,u,v\rangle + \langle 1\cdot u,v\rangle =$$

ולפי הנחת האינדקוציה:

$$= (a-1)\langle u,v\rangle + \langle u,v\rangle = a\langle u,v\rangle$$

ii. עבור $a=0$ הטענה טריוויאלית:

$$\langle 0u,v\rangle = \langle 0,v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|v+0\|^2 - \|v-0\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|v\|^2 - \|v\|^2\right) = 0 = 0\langle u,v\rangle$$

iii. עבור $a\in\mathbb{Z}$ שלילי, מסעיף א' אנו יודעים:

$$\langle (-a)\,u,v\rangle = (-a)\langle u,v\rangle = -a\langle u,v\rangle$$

בעזרת אדיטיביות וסעיף ב':

$$\langle au,v\rangle + \langle (-a)\,u,v\rangle = \langle (a+(-a))\,u,v\rangle = \langle 0u,v\rangle = 0$$

ולכן גם $\langle (-a)\,u,v\rangle = -\langle au,v\rangle$ ומכאן:

$$\langle -au,v\rangle = -a\langle u,v\rangle$$

נכפיל את שני האגפים ב$-1-$ וסיימנו.

iv. עבור $a=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$, כאשר $m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}$, מתקיים $m=na$. מהסעיפים הקודמים:

$$n\langle au,v\rangle = \langle nau,v\rangle = \langle mu,v\rangle = m\langle u,v\rangle = na\langle u,v\rangle$$

נצמצם ב$-n$ וסיימנו.

v. עבור $a\in\mathbb{R}$ כללי, ניקח סדרה $\{a_n\}\subset\mathbb{Q}$ ששואפת ל$-a$. לפיכך, $a_n-a\to 0$ ולכן:

$$\|(a_n-a)\,u\| = |a-a_n|\cdot\|u\| \to 0$$

כמו כן, $(a_n - a)\,u = (a_n u \pm w) - (au \pm w)$ ולכן גם:

$$\|au \pm w\| - \|a_n u \pm w\| \to 0$$

לפי שאלה 1. לכן:

$$\langle au, w\rangle - \langle a_n u, w\rangle = \frac{1}{4}\left(\|au + w\| - \|a_n u + w\| - \|au - w\| + \|a_n u - w\|\right) \to 0$$

כלומר $\langle a_n u, w\rangle \to \langle au, w\rangle$. ברור ש: $a_n \langle u, w\rangle \to a \langle u, w\rangle$. לפי סעיף ד',

$$\langle a_n u, w\rangle = a_n \langle u, w\rangle$$

ולכן לפי יחידות הגבול:

$$\langle au, w\rangle = a \langle u, w\rangle$$

והוכחנו שמולטיפלטיביות מתקיימת. בסך הכל הוכחנו את הדרוש.