פתרון תרגיל 6 אינפי 3 תשע"ו

15 בדצמבר 2015

1. נפריך ונוכיח ביד רמה.

(א) לא. נתבונן בפונקציה $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x)=x$. הפונקציה רציפה במ"ש, אך $\frac{1}{f}=\frac{1}{x}$ אינה רציפה במ"ש (התבוננו בנקודות $x_n=\frac{1}{n},y_n=\frac{1}{n}$, למשל).

(ב) כן. לכל $x,y\in X$ מתקיים:

$$\left|\frac{1}{f}(x)-\frac{1}{f}(y)\right|=\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(y)}\right|=\left|\frac{f(y)-f(x)}{f(x)f(y)}\right|\leq\frac{|f(y)-f(x)|}{R^2}$$

f רציפה במ"ש ולכן לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ עבורו $|f(y)-f(x)|<\varepsilon R^2$ ולכן $\left|\frac{1}{f}(x)-\frac{1}{f}(y)\right|<\varepsilon$ ואכן רציפה במ"ש.

(ג) לא. הדוגמה הנגדית בסעיף הבא.

(ד) לא. נגדיר פונקציות $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ על ידי:

$$f(x)=x$$

$$g(x)=\begin{cases}x-\lfloor x\rfloor & \lfloor x\rfloor\in2\mathbb{Z}\\ 1-(x-\lfloor x\rfloor) & \lfloor x\rfloor\in2\mathbb{Z}+1\end{cases}$$

כאשר $\lfloor x\rfloor$ הוא החלק השלם התחתון של x. בין כל מספר זוגי למספר אי־זוגי הפונקציה עולה כקו ישר (ששיפועו 1), מ-0 ל-1, ובין מספר אי־זוגי לזוגי הפונקציה יורדת כקו ישר (ששיפועו 1), מ-1 ל-0.

f רציפה במ"ש, g חסומה וכמו כן g רציפה במ"ש, כי בין כל שני מספרים $x < y$ קרובים מספיק (למשל, שהמרחק ביניהם קטן מחצי) מתקיים שאם $\lfloor x \rfloor < \lfloor y \rfloor$ ואז $\lfloor y \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$ ו־$x < \lfloor y \rfloor \leq y$. לכן:

$$|g(y) - g(x)| \leq |g(y) - g(\lfloor y \rfloor)| + |g(\lfloor y \rfloor) - g(x)|$$

$$\leq |g(y) - g(\lfloor y \rfloor)| + |g(\lfloor x \rfloor + 1) - g(x)|$$

נחשב:

$$|g(y) - g(\lfloor y \rfloor)| = \begin{cases} |y - \lfloor y \rfloor - 0| & \lfloor x \rfloor \in 2\mathbb{Z} \\ |1 - (y - \lfloor y \rfloor) - 1| & \lfloor x \rfloor \in 2\mathbb{Z} + 1 \end{cases} = y - \lfloor y \rfloor$$

באופן דומה:

$$|g(\lfloor x \rfloor + 1) - g(x)| = \begin{cases} |y - \lfloor y \rfloor - 0| & \lfloor x \rfloor \in 2\mathbb{Z} \\ |1 - (y - \lfloor y \rfloor) - 1| & \lfloor x \rfloor \in 2\mathbb{Z} + 1 \end{cases} = \lfloor y \rfloor - x$$

מכיוון ש: $\lfloor y \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.

לכן:

$$|g(y) - g(x)| \leq y - \lfloor y \rfloor + \lfloor y \rfloor - x = y - x$$

אם $\lfloor y \rfloor = \lfloor x \rfloor$ אז מיד לפי ההגדרה $|g(y) - g(x)| = y - x$.

בכל אופן, $|g(y) - g(x)| \leq |y - x|$ולכן g רציפה במ"ש (נבחר $\delta = \varepsilon$).

לעומת זאת:

$$f \cdot g(x) = \begin{cases} x^2 - x\lfloor x \rfloor & \lfloor x \rfloor \in 2\mathbb{Z} \\ x(1 + \lfloor x \rfloor) - x^2 & \lfloor x \rfloor \in 2\mathbb{Z} + 1 \end{cases}$$

ובפרט $f \cdot g(2n) = 0$ וגם $f \cdot g\left(2n + \frac{1}{n}\right) = 2 + \frac{1}{n^2}$, לכן:

$$\left|2n + \frac{1}{n} - 2n\right| = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

כאשר $n \longrightarrow \infty$, אך:

$$\left|f \cdot g\left(2n + \frac{1}{n}\right) - f \cdot g(2n)\right| = \left|2 + \frac{1}{n^2}\right| \longrightarrow 2$$

כאשר $n \longrightarrow \infty$ ולכן $f \cdot g$ לא רציפה במ"ש.

(ה) כן. לכל $x,y\in X$ מתקיים:

$$\left|f\cdot g\left(x\right)-f\cdot g\left(y\right)\right|=\left|f\left(x\right)g\left(x\right)-f\left(y\right)g\left(y\right)\right|\le$$

$$\le\left|f\left(x\right)g\left(x\right)-f\left(x\right)g\left(y\right)\right|+\left|f\left(x\right)g\left(y\right)-f\left(y\right)g\left(y\right)\right|=$$

$$=\left|g\left(x\right)-g\left(y\right)\right|\cdot\left|f\left(x\right)\right|+\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|\cdot\left|g\left(y\right)\right|$$

הפונקציות $f.g$ חסומות ולכן קיים $R>0$ עבורו לכל $x\in X$, $\left|f\left(x\right)\right|,\left|g\left(x\right)\right|\le R$. בפרט:

$$\left|f\cdot g\left(x\right)-f\cdot g\left(y\right)\right|\le R\cdot\left(\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|+\left|g\left(x\right)-g\left(y\right)\right|\right)$$

מכיוון שהפונקציות $f.g$ רציפות במ"ש, לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ עבורו

$$\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|,\left|g\left(x\right)-g\left(y\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2R}$$

ולכן

$$\left|f\cdot g\left(x\right)-f\cdot g\left(y\right)\right|<\varepsilon$$

וסיימנו.

2. נשים לב להבדל בין הנורמות.

(א) לא. ניקח את הפונקציה:

$$f\left(x\right)=\begin{cases} k^{2}x-k^{3} & k\le x\le k+\frac{1}{2k^{2}}\\ k^{3}-1+k^{2}x & k+\frac{1}{2k^{2}}\le x\le k+\frac{1}{k^{2}}\\ 0 & otherwise \end{cases}$$

בתחילת כל קטע $\left[k,k+\frac{1}{k}\right]$ "ראש של משולש שווה שוקיים" בגובה $\frac{1}{2}$ ורוחב בסיס $\frac{1}{k^{2}}$ ובכל מקום אחר $f=0$. לכן f רציפה.

שטח כל משולש בקטע $\left[k,k+\frac{1}{k}\right]$ הוא $\frac{1}{4k^{2}}$ ובפרט לכל k,

$$\int_{k}^{k+1}\left|f\left(x\right)\right|dx=\frac{1}{4k^{2}}$$

לכל k, $\frac{1}{2k^2} \longrightarrow 0$ = $\left|k+\frac{1}{2k^2}-k\right|$ אך $\left|f\left(k+\frac{1}{2k^2}\right)-f\left(k\right)\right| = |1-0| =$

1ולכן f אינה רציפה במ"ש.

מצד שני, נתבונן בסדרת הפונקציות:

$$f_n\left(x\right) = \begin{cases} f\left(x\right) & x \le n \\ 0 & x > n \end{cases}$$

ולכן:

$$\|f-f_n\| = \int_{-\infty}^{\infty} \left|f\left(x\right)-f_n\left(x\right)\right| dx = \int_{n}^{\infty} \left|f\left(x\right)\right| dx = \sum_{k=n}^{\infty} \int_{k}^{k+1} \left|f\left(x\right)\right| dx = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{4k^2}$$

ו־$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{4k^2} \longrightarrow 0$ כי זהו זנב של טור מתכנס, ולכן $f_n \longrightarrow f$.

הפונקציות f_n רציפות במ"ש, מכיוון שהן רציפות ושונות מ־0 למעט הקטע הסגור $[0,n]$ (ולפי קנטור הן רציפות במ"ש).

(ב) כן. אם מתקיים $\|f-f_n\| \longrightarrow 0$ לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ ולכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\|f\left(x\right)-f_n\left(x\right)\| \le \|f-f_n\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

בנוסף, קיים $\delta > 0$ עבורו לכל $x,y \in \mathbb{R}$ אז $\left|f_n\left(x\right)-f_n\left(y\right)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ (כי f_n רציפה במ"ש לכל n) ולכן:

$$\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right| \le \left|f_n\left(y\right)-f\left(y\right)\right|+\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|+\left|f_n\left(x\right)-f_n\left(y\right)\right| < \varepsilon$$

ולכן גם f רציפה במ"ש.

3. כאשר גוזרים לפי משתנה מסוים ־ מתייחסים אל האחרים כאל קבועים.

(א) נגזור לפי x:

$$f_x\left(x,y\right) = 3x^2 - \frac{1}{y}$$

והיא מוגדרת כאשר $y \ne 0$.

נגזור לפי y:

$$f_y\left(x,y\right) = 6y + \frac{x}{y^2}$$

והיא מוגדרת כאשר $y \neq 0$.

(ב) נגזור לפי x:

$$f_x(x,y) = e^{\cos(xy)} \sin(xy)\, y$$

ובאופן דומה נגזור לפי y:

$$f_y(x,y) = e^{\cos(xy)} \sin(xy)\, x$$

ושתי הנגזרות מוגדרות בכל $\mathbb{R}^2$.

(ג) נגזור לפי x:

$$f_x(x,y) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

ובאופן דומה הנגזרות לפי z, y הן:

$$f_z(x,y) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, f_y(x,y)\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

ושלוש הנגזרות מוגדרות בכל $\mathbb{R}^3$ למעט $(0,0,0)$.

(ד) נגזור לפי x:

$$f_x(x,y) = \frac{3x^2}{x^3+y^3-z^3}$$

ובאופן דומה הנגזרות לפי z, y הן:

$$f_z(x,y) = \frac{-3z^2}{x^3+y^3-z^3}, f_y(x,y) = \frac{3y^2}{x^3+y^3-z^3}$$

ובהתחשב בתחום ההגדרה של $\ln$, הן מוגדרות בתחום $x^3+y^3-z^3 > 0$.

4. נבדוק את רציפות הפונקציה ורציפות הנגזרות החלקיות. אם הפונקציה לא רציפה, האי אינה דיפרנציאבילית. מצד שני, אם הנגזרות החלקיות רציפות הפונקציה דיפרנציאבילית. אם ניוותר ללא הכרעה, נבדוק דיפרנציאביליות לפי ההגדרה.

(א) כאשר $(x,y) \neq (0,0)$ הפונקציה רציפה (מכפלה, חיבור וכו' של רציפות). נבדוק האם הנגזרות החלקיות רציפות. נגזור לפי x:

$$f_x(x,y) = \frac{3x^2\left(x^2+y^2\right) - 2x\left(x^3+y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{x^4+3x^2y^2-2xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

נגזור לפי y:

$$f_y\left(x,y\right)=\frac{4y^3\left(x^2+y^2\right)-2y\left(x^3+y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{4x^2y^3+2y^5-2x^3y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

וכאשר $(x,y)\neq(0,0)$ הנגזרות רציפות ולכן הפונקציה דיפרנציאבילית.

כאשר $(x,y)=(0,0)$, f רציפה מכיוון שמתקיים:

$$0\leq\left|\frac{x^3+y^4}{x^2+y^2}\right|\leq\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right|+\left|\frac{y^4}{x^2+y^2}\right|\leq\left|\frac{x^3}{x^2}\right|+\left|\frac{y^4}{y^2}\right|=|x|+\left|y^2\right|$$

$0\longleftarrow\left|x\right|+\left|y^2\right|$ כאשר $(0,0)\longleftarrow(x,y)$, ולכן לפי סנדוויץ' גם $f\left(x,y\right)\longleftarrow$ $.(0,0)$

נחשב את הנגזרות החלקיות בנקודה:

$$f_x\left(0,0\right)=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{f\left(t,0\right)-f\left(0,0\right)}{t}=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{\frac{t^3}{t^2}-0}{t}=1$$

$$f_y\left(0,0\right)=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{f\left(0,t\right)-f\left(0,0\right)}{t}=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{\frac{t^4}{t^2}-0}{t}=\lim_{t\longrightarrow0}t=0$$

נבדוק דיפרנציאביליות לפי ההגדרה:

$$f\left(h_1,h_2\right)=f\left(0,0\right)+h_1+o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)$$

ולכן, נבדוק האם:

$$\lim_{h_1^2+h_2^2\longrightarrow0}\frac{\frac{h_1^3+h_2^4}{h_1^2+h_2^2}-h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0$$

אם נתקדם לאורך המסלול $h_1=h_2$ נקבל:

$$=\lim_{h_1\longrightarrow0}\frac{h_1^4-h_1^3}{\left(2h_1^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{8}}\left(\frac{h_1^4}{\left|h_1^3\right|}-\frac{h_1^3}{\left|h_1^3\right|}\right)$$

לביטוי $\frac{h_1^4}{\left|h_1^3\right|}$ יש גבול ולביטוי $\frac{h_1^3}{\left|h_1^3\right|}$ אין גבול ולכן בסה"כ הגבול לא קיים. בפרט, הגבול אינו שווה ל־0 ולכן הפונקציה אינה דיפרנציאבילית כאשר $(x,y)=$ $.(0,0)$

(ב) כאשר $(x,y)\neq(0,0)$, הפונקציה רציפה. נחשב את הנגזרות החלקיות:

$$f_x(x,y)=\frac{3x^2\sqrt{x^2+y^2}-\frac{2x\left(x^2-y^2\right)}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{2x^4+3x^2y^2-xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_y(x,y)=\frac{-2y\sqrt{x^2+y^2}-\frac{2y\left(x^2-y^2\right)}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{-2x^2y-y^3-x^3y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

שתי הנגזרות רציפות ולכן הפונקציה דיפרנציאבילית כאשר $(x,y)\neq(0,0)$.

כאשר, $(x,y)=(0,0)$ הפונקציה רציפה מכיוון שמתקיים:

$$0\leq\left|\frac{x^3-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq\left|\frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|+\left|\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq\left|\frac{x^3}{\sqrt{x^2}}\right|+\left|\frac{y^2}{\sqrt{y^2}}\right|=\left|x^2\right|+|y|$$

$\left|x^2\right|+|y|\longrightarrow 0$ כאשר $(x,y)\longrightarrow(0,0)$ ולכן לפי סנדוויץ' גם $f(x,y)\longrightarrow$ $(0,0)$.

נחשב את הנגזרות החלקיות הנקודה:

$$f_x(0,0)=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{\frac{t^3}{\sqrt{t^2}}-0}{t}=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{t^2}{|t|}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{\frac{-t^2}{\sqrt{t^2}}-0}{t}=\lim_{t\longrightarrow 0}-\frac{t}{|t|}$$

הגבול הזה לא קיים. לכן, $f_y(0,0)$ לא קיימת ולכן f אינה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

(ג) הפונקציה רציפה. נחשב את הנגזרות החלקיות:

$$f_x(x,y)=\frac{4x^3}{x^4+y^6+1}$$

$$f_y(x,y)=\frac{6y^5}{x^4+y^6+1}$$

הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות בכל $\mathbb{R}^2$ ולכן f דיפרנציאבילית בכל $\mathbb{R}^2$.

(ד) ראשית, נבדוק דיפרנציאביליות בנקודות $x\neq 0$.

הפונקציה רציפה. הנגזרות החלקיות הן:

$$f_x(x,y)=\sin\frac{y^2}{x}-x\cos\frac{y^2}{x}\cdot\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)=\sin\frac{y^2}{x}-\frac{y^2}{x}\cos\frac{y^2}{x}$$

$$f_y(x,y) = x\cos\frac{y^2}{x}\cdot\frac{2y}{x} = 2y\cos\frac{y^2}{x}$$

הנגזרות החלקיות רציפות כאשר $x \neq 0$ ולכן הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודות אלה.

כעת, נבדוק דיפרנציאביליות בנקודות $x = 0$.

הפונקציה רציפה, מכיוון ש:

$$0 \leq \left|x\sin\frac{y^2}{x}\right| \leq |x|$$

$|x| \longrightarrow 0$ כאשר $x \longrightarrow 0$ ולכן גם $f(x,y) \longrightarrow 0$.

נחשב את הנגזרות החלקיות:

$$f_x(0,y_0) = \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(t,y_0)-f(0,y_0)}{t} = \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{t\sin\frac{y_0^2}{t}}{t} = \lim_{t\longrightarrow 0}\sin\frac{y_0^2}{t}$$

$$f_y(0,y_0) = \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(0,t+y_0)-f(0,y_0)}{t} = \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{0-0}{t} = 0$$

כאשר $y_0 \neq 0$, הגבול $\lim_{t\longrightarrow 0}\sin\frac{y_0^2}{t}$ אינו קיים ולכן f_x לא קיימת והפונקציה אינה דיפרנציאבילית.

כאשר $y_0 = 0$, $\lim_{t\longrightarrow 0}\sin\frac{y_0^2}{t} = 0$ נבדוק דיפרנציאביליות לפי ההגדרה:

$$f(h_1,h_2) = o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)$$

לכן, נבדוק האם:

$$\lim_{h_1^2+h_2^2\longrightarrow 0}\frac{h_1\sin\frac{h_2^2}{h_1}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$

נחלק למקרים.

בצורת התקדמות שבה $\frac{h_2^2}{h_1} \longrightarrow 0$,

$$\lim_{h_1^2+h_2^2\longrightarrow 0}\frac{h_1\sin\frac{h_2^2}{h_1}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{h_1^2+h_2^2\longrightarrow 0}\frac{h_1\cdot\frac{h_2^2}{h_1}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\cdot\frac{\sin\frac{h_2^2}{h_1}}{\frac{h_2^2}{h_1}} = \lim_{h_1^2+h_2^2\longrightarrow 0}\frac{h_1\cdot\frac{h_2^2}{h_1}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$= \lim_{h_1^2+h_2^2\longrightarrow 0}\frac{h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq \lim_{h_1^2+h_2^2\longrightarrow 0}\frac{h_2^2}{\sqrt{h_2^2}} = 0$$

כלומר כאשר $|h_1| > h_2^2$ אכן יש התכנסות ל־0.

בצורת התקדמות בה $|h_1| = h_2^2$,

$$\lim_{h_1^2+h_2^2\longrightarrow 0}\frac{h_1\sin\frac{h_2^2}{h_1}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\leq\lim_{h_1^2+h_2^2\longrightarrow 0}\frac{h_2^2}{\sqrt{h_2^4+h_2^2}}\leq\lim_{h_1^2+h_2^2\longrightarrow 0}\frac{h_2^2}{\sqrt{h_2^2}}=0$$

ובצורת התקדמות בה $|h_1| < h_2^2$ קיים $m > 0$ עבורו:

$$\frac{h_2^2}{h_1} > m$$

ולכן:

$$\lim_{h_1^2+h_2^2\longrightarrow 0}\frac{h_1\sin\frac{h_2^2}{h_1}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\leq\lim_{h_1^2+h_2^2\longrightarrow 0}\frac{h_1}{\sqrt{h_2^4+h_2^2}}=\lim_{h_1^2+h_2^2\longrightarrow 0}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{h_2^2}{h_1^2}}}\leq$$

$$\leq\lim_{h_1^2+h_2^2\longrightarrow 0}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{m}{|h_1|}}}=0$$

לפיכך, בכל צורה בה נתקדם הגבול אכן יהיה 0 ולכן f דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

5. המישור המשיק למשטח בנקודה (x_0,y_0,z_0) מאונך לגרדיאנט של:

$$F\left(x,y,z\right)=x^2+y^2-z$$

שהוא:

$$\nabla F\left(x_0,y_0,z_0\right)=\left(2x_0,2y_0,-1\right)$$

נחפש נקודה בה הגרדיאנט פונה באותו הכיוון של $(1,1-2)$, כלומר:

$$\left(2x_0,2y_0,-1\right)=t\cdot\left(1,1-2\right)$$

מהקואורדינטה האחרונה נקבל ש־$t=\frac{1}{2}$ ולכן $x_0=y_0=\frac{1}{4}$. נציב זאת במשוואת המשטח כדי לקבל את z_0:

$$z_0=x_0^2+y_0^2=\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{8}$$

ובסה"כ $(x_0,y_0,z_0)=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right)$.

6. הגרדיאנט של הפונקציה המתארת את המשטח הוא:

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{x}},\frac{1}{2\sqrt{y}},\frac{1}{2\sqrt{z}}\right)$$

לכן המישור המשיק בנקודה (x_0,y_0,z_0) הוא:

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}\left(x-x_0\right)+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}\left(y-y_0\right)+\frac{1}{2\sqrt{z_0}}\left(z-z_0\right)=0$$

נציב $y=z=0$ כדי למצוא את נקודת החיתוך עם ציר ה־x:

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}\left(x-x_0\right)+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}\left(0-y_0\right)+\frac{1}{2\sqrt{z_0}}\left(0-z_0\right)=0$$

$$\frac{x}{2\sqrt{x_0}}-\frac{\sqrt{x_0}}{2}-\frac{\sqrt{y_0}}{2}-\frac{\sqrt{z_0}}{2}=0$$

מכיוון שהנקודה נמצאת על המשטח, היא מקיימת את משוואותו כלומר $\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=\sqrt{a}$ ולכן:

$$\frac{x}{2\sqrt{x_0}}-\frac{\sqrt{a}}{2}=0$$

ובסה"כ $x=\sqrt{a}\sqrt{x_0}$, כלומר נקודת החיתוך עם ציר ה־x היא:

$$P_x=\left(\sqrt{a}\sqrt{x_0},0,0\right)$$

באופן דומה, נקבל שנקודות החיתוך עם ציר ה־y וציר ה־z הן:

$$P_y=\left(0,\sqrt{a}\sqrt{y_0},0\right),P_z=\left(0,0,\sqrt{a}\sqrt{z_0}\right)$$

ולכן:

$$\|P_x\|+\|P_y\|+\|P_z\|=\sqrt{a}\sqrt{x_0}+\sqrt{a}\sqrt{y_0}+\sqrt{a}\sqrt{z_0}=$$

שוב מכיוון שהנקודה נמצאת על המשטח, $\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=\sqrt{a}$ ולכן:

$$\|P_x\|+\|P_y\|+\|P_z\|=\sqrt{a}\left(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}\right)=a$$

7. ראשית, נבדוק האם הפונקציות דיפרנציאביליות; אם הן אכן כאלו, נשתמש בדרך הפשוטה לחישוב נגזרת כיוונית.

(א) הפונקציה רציפה בכל $\mathbb{R}^2$. הנגזרות החלקיות הן:

$$f_x\left(x,y\right)=\sin\left(x+y\right)+x\cos\left(x+y\right)$$

$$f_y\left(x,y\right)=x\cos\left(x+y\right)$$

הנגזרות החלקיות רציפות ולכן הפונקציה דיפרנציאבילית. אם כך:

$$D_hf\left(a\right)=\nabla f\left(a\right)\cdot h$$

במקרה שלנו:

$$f_x\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2}=1,f_y\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2}=0$$

לכן $\nabla f\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=\left(1,0\right)$. $h=\left(-1,0\right)$ ולכן:

$$D_hf\left(a\right)=\left(1,0\right)\cdot\left(-1,0\right)=-1$$

(ב) f רציפה והנגזרות החלקיות:

$$f_x=y^2z^3,f_y=2xyz^3,f_z=3xy^2z^2$$

רציפות גם הן ולכן הפונקציה דיפרנציאבילית. בנקודה a נקבל:

$$\nabla f\left(3,2,1\right)=\left(2^2\cdot1^3,2\cdot3\cdot2\cdot1^3,3\cdot3\cdot2^2\cdot1^2\right)=\left(4,12,36\right)$$

ננרמל את וקטור הכיוון:

$$\frac{h}{\|h\|}=\frac{h}{\sqrt{4^2+3^2}}=\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5},0\right)$$

ולכן:

$$D_hf\left(a\right)=\left(4,12,36\right)\cdot\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5},0\right)=\frac{52}{5}$$