

שאלון סגור

בס"ד
שאלון בחינה בקורס: משוואות דיפרנציאליות רגילות
מספר הקורס: 83-115-01
מרצה: דר' אלכסנדרה אגרנוביץ'
מתרגלים: מיכאל קונטורוביץ', זהבית צבי, רואי אסרף
סמסטר ב', מועד א': ח'אב, התשעה (24.07.2015)
משך הבחינה: שלוש שעות

חומר עזר: 3 דפים חד-צדדיים של A4, מחשבון רגיל (אין להשתמש במחשבון גרפי)

ניקוד: במבחן אפשר לצבור 108 נקודות.

יש לפרט שלבי החישוב נא לכתוב באופן ברור ומסודר. שאלה מבולגנת ולא מסודרת לא תוכל לזכות במלוא הנקודות.

בהצלחה!

שאלה 1. (24 נקודות)

נתונה המשוואה

$$(4x^3y + 2xy^3)dx + (y^4 - 4x^4)dy + \beta \left(\left(\frac{5}{2}x^4 + \frac{1}{2}y^4 \right) dy - xy^3 dx \right) = 0$$

עם פרמטר ממשי β .

- א. עבור איזה ערך של β מתקבלת משוואה מדויקת? (לא לפתור את המשוואה)
ב. עבור איזה ערך של β מתקבלת משוואת ברנולי? (לא לפתור את המשוואה)
ג. יהי $\beta = 0$. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה המתקבלת.

שאלה 2. (16 נקודות)

א. קבעו האם ייתכן ששלוש פונקציות גזירות $y_1(x)$, $y_2(x)$ ו- $y_3(x)$ המקיימות

$$\begin{cases} y_1(0) = 1, y_1'(0) = -1, y_1''(0) = 1 \\ y_2(0) = -1, y_2'(0) = -1, y_2''(0) = 1 \\ y_3(0) = 0, y_3'(0) = 1, y_3''(0) = -1 \end{cases}$$

מהוות קבוצת פתרון בסיסית (יסודית) של משוואה דיפרנציאלית ליניארית הומוגנית מסדר 3, שמקדמיה בהצגה סטנדרטית (מקדם של y''' שווה ל-1) רציפים בקטע $(-1,1)$. נמקו את תשובתכם.

ב. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $4xy'' - 4(x+1)y' + \left(2 + \frac{3}{x}\right)y = 0$ אם ידוע

פתרון פרטי שלה $y_1 = \sqrt{x}$.

שאלה 3 . (32 נקודות)

א. נתון כי למשוואה ההומוגנית $y''+ay'+by=0$, כאשר a, b קבועים, יש פתרון

$$e^x - 4e^{-2x}$$

$$y''+ay'+by=e^x$$

$$; \quad y(0)=1, y'(0)=\frac{4}{3}$$

ב. האם ייתכן כי למשוואה דיפרנציאלית מהצורה $y''+cy'+dy=e^x$ כאשר c, d

קבועים, יהיה פתרון $Be^x - 4e^{-2x} + xe^{2x}$? הסבירו;

ג. האם ייתכן כי למשוואה דיפרנציאלית מהצורה $y''+cy'+dy=e^x$ כאשר c, d

קבועים, יהיה פתרון $xe^{-2x} - 4e^{-2x}$? הסבירו.

ד. (אין קשר לסעיפים קודמים) מצאו פתרון כללי של המשוואה

$$x^2 y'' - xy' + y = x + \frac{3}{x}, \quad x > 0$$

שאלה 4 . (16 נקודות)

נתונה מערכת משוואות דיפרנציאליות $\bar{x}' = A\bar{x}$

$$\text{כאשר } \bar{x} = \bar{x}(t); \quad A = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 2 & r_1 & 0 \\ 1 & 1 & r_2 \end{bmatrix}; \quad r_1, r_2 \in \mathbb{R} - \text{פרמטרים המקיימים } r_1 \neq r_2$$

א. מצאו ביטוי לפתרון הכללי של המערכת;

$$\text{ב. מצאו את פתרון } \bar{x}(t) \text{ המקיים } r_2 - r_1 = 3, \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{x}'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

שאלה 5 . (16 נקודות)

א. הוכיחו בעזרת הגדרת לפלס (אין להסתמך על טבלה): אם $f(t), f'(t)$ - רציפות ו-

$f''(t)$ - רציפה למקוטעין בכל קטע מהצורה $0 \leq t \leq A$, אזי

$$L\{f''(t)\} = s^2 L\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$$

(ניתן להניח כי מתקיימים התנאים עבור קיום התמרת לפלס של הפונקציות הנ"ל)

$$\text{ב. (6 נק') פתרו את בעיית התחלה הבאה} \quad \begin{cases} 2y'' - y = t\delta(t-2) \\ y(0) = 0, y'(0) = 3 \end{cases}$$

Table of Laplace Transforms

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1. 1	$\frac{1}{s}$	2. e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
3. $t^n, n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	4. $t^p, p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
5. \sqrt{t}	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$	6. $t^{n-\frac{1}{2}}, n=1,2,3,\dots$	$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$
7. $\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	8. $\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
9. $t \sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	10. $t \cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
11. $\sin(at+b)$	$\frac{s \sin(b) + a \cos(b)}{s^2+a^2}$	12. $\cos(at+b)$	$\frac{s \cos(b) - a \sin(b)}{s^2+a^2}$
13. $e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	14. $e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
15. $t^n e^{at}, n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	16. $f(ct)$	$\frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right)$
17. $u_c(t) = u(t-c)$	$\frac{e^{-cs}}{s}$	18. $\delta(t-c)$	e^{-cs}
19. $u_c(t) f(t-c)$	$e^{-cs} F(s)$	20. $u_c(t) g(t)$	$e^{-cs} \mathcal{L}\{g(t+c)\}$
21. $e^{ct} f(t)$	$F(s-c)$	22. $t^n f(t), n=1,2,3,\dots$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
23. $\frac{1}{t} f(t)$	$\int_s^\infty F(u) du$	24. $\int_0^t f(v) dv$	$\frac{F(s)}{s}$
25. $\int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau$	$F(s)G(s)$	26. $f(t+T) = f(t)$	$\frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1-e^{-sT}}$
27. $f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$		