טופולוגיה של $\mathbb{R}^n$

הגדרה

תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

אוסף הקבוצות $\{E_j\}_{j\in J}$ הוא **כיסוי** של A, אם:

$$A \subseteq \bigcup_{j\in J} E_i$$

הכיסוי הוא **פתוח** אם הקבוצות $\{E_j\}_{j\in J}$ פתוחות.

משפט

קבוצה $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ היא קומפקטית אם ורק אם לכל כיסוי פתוח שלה קיים תת-כיסוי סופי.

משפט

$\boxed{\Leftarrow}$

נניח כי $\mathcal{K}$ קומפקטית.

תחילה, נוכיח את הכיוון כאשר $\mathcal{K}$ תיבה סגורה $\mathcal{I}$ (תיבה סגורה היא קבוצה קומפקטית).

יהי:

$$\{G_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq \mathbb{R}^n$$

כיסוי פתוח של $\mathcal{I}$.

נניח בשלילה כי לא קיים לכיסוי פתוח זה תת-כיסוי סופי.

נחלק את $\mathcal{I}$ ל - 2^n תיבות (באופן הבא: נחלק את $\mathcal{I}$ לשתי תיבות זהות; נחלק כל אחת מהתיבות לשתי תיבות זהות; נחזור על הפעולה n פעמים).

עפ"י הנחת השלילה, קיימת תיבה שלא קיים לה תת-כיסוי סופי של הכיסוי הנתון.

נחלק תיבה זו ל - 2^n תיבות (באופן דומה).

נמשיך את התהליך, ונקבל סדרה $\{\mathcal{I}_k\}$ של תיבות (קבוצות קומפקטיות), כך ש:

1. לכל $k \in \mathbb{N}$, לתיבה $\mathcal{I}_k$ לא קיים תת-כיסוי סופי של הכיסוי הנתון.

2. לכל $k \in \mathbb{N}$, מתקיים:

$$\mathcal{I}_{k+1} \subseteq \mathcal{I}_k$$

3. מתקיים:

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{diam} \mathcal{I}_k = 0$$

עפ"י הלמה של קנטור, קיימת נקודה ξ, כך שלכל $k \in \mathbb{N}$, מתקיים:

$$\xi \in \mathcal{I}_k$$

בפרט:

$$\xi \in \mathcal{I}$$

$\{G_\alpha\}$ סיכוי פתוח של $\mathcal{I}$, לכן, קיים α_0 כך ש:

$$\xi \in G_{\alpha_0}$$

G_{α_0} פתוחה, לכן, קיים $0 < r$ כך ש:

$$B(\xi, r) \subseteq G_{\alpha_0}$$

עפ"י הגדרת ξ ועפ"י (2), קיים $N \in \mathbb{N}$, כך שלכל $N \leq k \in \mathbb{N}$, מתקיים:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_k &\subseteq B(\xi, r) \\ &\subseteq G_{\alpha_0} \end{aligned}$$

לכן, לכל $N \leq k \in \mathbb{N}$, קיים לתיבה $\mathcal{I}_k$ תת-כיסוי סופי של הכיסוי הנתון.

סתירה.

לכן, קיים לכיסוי פתוח זה תת-כיסוי סופי.

לכן, לכל כיסוי פתוח של $\mathcal{I}$ קיים תת-כיסוי סופי.

כעת, נוכיח את הכיוון כאשר $\mathcal{K}$ קומפקטית שרירותית.

יהי:

$$\{G_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathbb{R}^n$$

כיסוי פתוח של $\mathcal{K}$.

$\mathcal{K}$ בפרט חסומה, לכן, קיימת תיבה סגורה $\mathcal{I}$ כך ש:

$$\mathcal{K} \quad \subseteq \quad \mathcal{I}$$

נגדיר:

$$G \quad \coloneqq \quad \mathbb{R}^n \backslash \mathcal{K}$$

נתבונן בכיסוי הפתוח ל - $\mathcal{I}$:

$$\{\{G_\alpha\} \cup G\} \quad = \quad \mathbb{R}^n$$

עפ"י הוכחת הכיוון עבור תיבה סגורה, קיים ל - $\mathcal{I}$ תת-כיסוי סופי של כיסוי זה.

עפ"י הגדרת $\mathcal{I}$, קיים ל $- \mathcal{K}$ תת-כיסוי סופי של כיסוי זה.

אם לתת-הכיסוי זה שייכת הקבוצה G, ניתן להוציא אותה, שכן:

$$\mathcal{K} \cup G \quad = \quad \emptyset$$

נקבל תת-כיסוי סופי ל - $\mathcal{K}$ של הכיסוי הנתון $\{G_\alpha\}$.

לכן, לכל כיסוי פתוח של $\mathcal{K}$ קיים תת-כיסוי סופי.

$\boxed{\Longrightarrow}$

נניח כי לכל כיסוי פתוח של $\mathcal{K}$ קיים תת-כיסוי סופי.

תחילה, נוכיח כי $\mathcal{K}$ חסומה.

יהי $x \in \mathbb{R}^n$.

נתבונן בכיסוי הפתוח של $\mathcal{K}$:

$$\{B(x, j)\}_{j \in \mathbb{N}} \quad = \quad \mathbb{R}^n$$

עפ"י ההנחה, קיים לכיסוי פתוח זה תת-כיסוי סופי:

$$\{B(x, j_\ell)\}_{\ell=1}^m$$

נגדיר:

$$r \quad \coloneqq \quad \max_{1 \le \ell \le m} j_\ell$$

לכן:

$$\mathcal{K} \quad \subseteq \quad B(x,r)$$

לכן, $\mathcal{K}$ חסומה.

כעת, נוכיח כי $\mathcal{K}$ סגורה.

נוכיח כי $\mathcal{K}^c$ פתוחה.

יהי $x \in \mathcal{K}^c$.

לכל $y \in \mathcal{K}$, קיימים $0 < \varepsilon_y, \delta_y$, כך ש:

$$B(x,\varepsilon_y) \cap B(x,\delta_y) \quad = \quad \emptyset$$

נתבונן בכיסוי הפתוח של $\mathcal{K}$:

$$\{B(y,\varepsilon_y) | y \in \mathcal{K}\}$$

עפ"י ההנחה, קיים לכיסוי פתוח זה תת-כיסוי סופי:

$$\{B(y_\ell,\varepsilon_{y_\ell})\}_{\ell=1}^{m}$$

נגדיר:

$$\delta \quad \coloneqq \quad \min_{1\le\ell\le m} \delta_{y_\ell}$$

לכן, לכל $1 \le \ell \le m$, מתקיים:

$$B(x,\delta) \cap B(y,\varepsilon_{y_\ell}) \quad = \quad \emptyset$$

לכן:

$$B(x,\delta) \cap \bigcup_{\ell=1}^{m} B(y,\varepsilon_{y_\ell}) \quad = \quad \emptyset$$

לכן:

$$B(x,\delta) \cap \mathcal{K} \quad = \quad \emptyset$$

לכן:

$$B(x,\delta) \quad \subseteq \quad \mathcal{K}^c$$

לכן, $\mathcal{K}^c$ פתוחה.

לכן, $\mathcal{K}$ סגורה.

לכן, $\mathcal{K}$ קומפקטית.

■

משפט

קבוצה $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ קומפקטית אם ורק אם לכל סדרה $\{x_i\} \in \mathcal{K}$, קיימת תת-סדרה מתכנסת לגבול ששייך ל - $\mathcal{K}$.

<u>פונקציות ב - $\mathbb{R}^n$</u>

הגדרה

תהי $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{R}^n$.

נאמר שעל E מוגדרת **פונקציה** f עם ערכים ב - $\mathbb{R}^m$ אם לכל $x \in E$ מתאים ווקטור יחיד מ - $\mathbb{R}^m$.

נסמן:

$$f: E \to \mathbb{R}^m$$

אם $m = 1$, נאמר ש $f -$ **ממשית**.

אם $2 \leq m$, נאמר ש $f -$ **ווקטורית**.

הערה

כל פונקציה ווקטורית $f: E \to \mathbb{R}^m$ ניתן לרשום בצורה:

$$f(x) \quad = \quad \big(f_1(x), \cdots, f_m(x)\big)$$

כאשר לכל $1 \leq i \leq m$, $f_i: E \to \mathbb{R}$ פונקציה ממשית.

לפונקציות f_i קוראים **הרכיבים** של f.

הגדרה (גבול לפי קושי)

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

תהי a נקודה גבולית של E, ותהי: $f: E \to \mathbb{R}^m$.

נאמר ש - $b \in \mathbb{R}^m$ הוא **גבול** הפונקציה f בנקודה a מעל E אם לכל $0 < \varepsilon$, קיים $0 < \delta$ כך שלכל $x \in E$, המקיים:

$$0 \quad < \quad ||x - a|| \quad < \quad \delta$$

מתקיים:

$$||f(x) - b|| \quad < \quad \varepsilon$$

נסמן:

$$\lim_{x\to a, x\in E} f(x) \quad = \quad b$$

אם קיימת סביבה של a המוכלת ב - E, נסמן:

$$\lim_{x\to a} f(x) \quad = \quad b$$

הגדרה (גבול לפי היינה)

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

תהי a נקודה גבולית של E, ותהי $f : E \to \mathbb{R}^m$.

נאמר ש - $b \in \mathbb{R}^m$ הוא **גבול** הפונקציה f בנקודה a מעל E אם לכל סדרה $\{x_k\} \in E$, כך שלכל $k \in \mathbb{N}$, $x_k \neq a$, המקיימת:

$$\lim_{k\to\infty} x_k \quad = \quad a$$

מתקיים:

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) \quad = \quad b$$

למה

תהי:

$$f \quad = \quad (f_1, \cdots, f_m)$$

ותהי:

$$b \quad = \quad (b_1, \cdots, b_m)$$

אזי:

$$\lim_{x\to a, x\in E} f(x) \quad = \quad b$$

אם ורק אם לכל $1 \leq i \leq m$:

$$\lim_{x\to a, x\in E} f_i(x) \quad = \quad b_i$$

הוכחה

הוכחת המשפט נובעת מהתכונות הבאות:

1. לכל $y \in \mathbb{R}^m$ ולכל $1 \leq j \leq m$, מתקיים:

$$|y_i| \quad \leq \quad ||y||$$

2. לכל $y \in \mathbb{R}^m$, מתקיים:

$$||y|| \quad \leq \quad \sqrt{m} \cdot \max_{1 \leq j \leq m} |y_j|$$

■

משפט

הגדרות הגבול לפי קושי והיינה שקולות.

הוכחה

עפ"י הלמה, מספיק להוכיח את המשפט עבור פונקציה ממשית.

במקרה זה, ההוכחה דומה להוכחה עבור פונקציות $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

■

מסקנה

אם לפונקציה f קיימים גבולות שונים לפי מסלולים שונים של התקרבות x ל - a, אזי ל $- f$ אין גבול ב - a.

דוגמה

נראה כי לא קיים הגבול:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

נניח כי:

$$x \quad = \quad \alpha \cdot y \quad , \quad \alpha \quad \in \quad \mathbb{R}$$

מתקיים:

$$\lim_{y\to 0, x=\alpha y} \frac{xy}{x^2+y^2} \quad = \quad \lim_{y\to 0} \frac{\alpha y^2}{(\alpha^2+1)y^2} \quad = \quad \frac{\alpha}{\alpha^2+1}$$

לכן, הגבול תלוי במסלול, לכן אינו קיים.

$\blacksquare$

משפט

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

תהי a נקודה גבולית של E, ותהיינה $f, g: E \to \mathbb{R}^m$.

אם:

$$\lim_{x \to a, x \in E} f(x) = b$$
$$\lim_{x \to a, x \in E} g(x) = c$$

אזי:

$$\lim_{x \to a, x \in E} f(x) + g(x) = b + c$$
$$\lim_{x \to a, x \in E} f(x) \cdot g(x) = b \cdot c$$

אם f, g ממשיות, $g(x) \neq 0$ ו - $c \neq 0$, אז:

$$\lim_{x \to a, x \in E} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$$

$\blacksquare$