פתרון הבוחן

שאלה 1

הוכיחו: פונקציה מונוטונית בקטע סגור אינטגרבילית בו.

פתרון

נניח ש $f\left(x\right)$ מונוטונית לא יורדת בקטע $\left[a,b\right]$. אזי לכל $x\in\left[a,b\right]$ מתקיים $f(a)\le f\left(x\right)\le f(b)$ ולכן הפונקציה חסומה. אם הפונקציה קבועה אז היא אינטגרבילית ולכן ניתן להניח בה"כ ש $f(a)\ne f(b)$. יהי $\varepsilon>0$. נראה שעבור $\delta=\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}>0$ לכל חלוקה T עם פרמטר חלוקה $\lambda(T)<\delta$ מתקיים:
$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$ כאשר $T:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$.

מכיון שהפונקציה מונוטונית לא יורדת אז לכל $1\le i\le n$:
$\omega_i=\sup\{f(x):x_{i-1}\le x\le x_i\}-\inf\{f(x):x_{i-1}\le x\le x_i\}=f(x_i)-f(x_{i-1})$.

נקבל ש

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n}\omega_i\lambda(T)<\delta\sum_{i=1}^{n}\omega_i=$$
$$\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\sum_{i=1}^{n}\omega_i=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)-f(x_{i-1})=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\left(f(b)-f(a)\right)=\varepsilon$$

ולכן הפונקציה אינטגרבילית עפ"י קריטריון רימן לאינטגרביליות.

אם $f\left(x\right)$ מונוטונית לא עולה בקטע $\left[a,b\right]$ אז ניתן להוכיח שהיא אינטגרבילית בצורה דומה.

פתרון שאלה 2
סעיף א

חשב את גבול הסדרה $S=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$.

$$S=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\ .$$

הפונקציה $f\left(x\right)=\dfrac{1}{1+x}$ אינטגרבילית לפי רימן בקטע $\left[0,1\right]$. (רציפה בקטע סגור)

נתבונן בסדרת החלוקות הנורמאלית $\left\{T_n\right\}_{n=1}^{\infty}$

בה בכל T_n אנו מחלקים את הקטע לקטעים שווים באורך $\Delta x_i=\dfrac{1}{n}$.

עבור הקטע $\left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}\right]$ נבחר את הנקודה $\frac{i}{n}$.

סכום רימן שואף לאינטגרל המסויים.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{i}{n}}=I=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2.$$

<u>סעיף ב</u>

$$\int\frac{x+1}{4+x^2}dx=\int\frac{x}{4+x^2}dx+\int\frac{1}{4+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{4+x^2}dx+\int\frac{1}{2^2+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln\left(4+x^2\right)+\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+c$$