הרצאה 17

$$\begin{cases} F_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0 \\ \vdots \\ F_m(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0 \end{cases}$$

מקרה ליניארי

ליניאריות $\begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}+b_{11}y_1+\dots+b_{1m}y_m=0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n+b_{m1}y_1+\dots+b_{mm}y_m=0 \end{cases} \Rightarrow j=1\dots m: y_j=\varphi(x_1,\dots,x_m)$

$$\det\left(b_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}\neq 0$$

משפט על פונ' סתומה כללית

משפט

תהי $\mathbb{W}\subset\circ\,\mathbb{R}^{n+m}=\underset{x\in}{\mathbb{R}^n}\times\underset{y\in}{\mathbb{R}^m}$

$$(x,y)\in\mathbb{R}^{n+m}\Rightarrow x\in\mathbb{R}^n, y\in\mathbb{R}^m$$

תהי $F:\mathbb{W}\to\mathbb{R}^m; F\in C^r(\mathbb{W}), r\geq 1$

1) תהי $(a,b)\in\mathbb{W}$ כך ש$F(a,b)=0$

2) נניח כי $\det\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a,b)\dots\frac{\partial F_1}{\partial y_m}(a,b)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(a,b)\dots\frac{\partial F_m}{\partial y_m}(a,b)\end{pmatrix}\neq 0$

אזי קיימות סביבות $b\ni V, a\ni U$ כך ש $\forall x\in U\ \exists!\, y\in V: F(x,y)=0$

הפונקציה $y\coloneqq\varphi(x), x\in U; \varphi\in C^r(U)$

הסבר

$$M\coloneqq\{(x,y)\in\mathbb{W}: F(x,y)=0\}$$

$$\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a,b)\right)_{i,j=1}^{m}\neq 0$$

אזי $\exists U,V$ כך ש$M\cap(U\times V)$ גרף של $y=\varphi(x)$

לדוגמא עבור $F(x,y)=xy\ m=1$

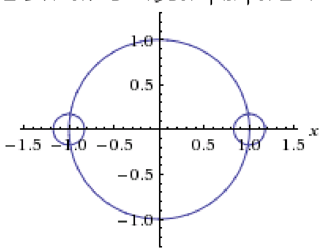
$$F(x,y)=xy=0$$

$$x=a\neq 0\Rightarrow y=0; \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=x$$

כלומר המשפט לא מתקיים עבור $x=0$.

או לדוגמא $F(x,y)=x^2-y^2-1=0$

בחיתוך עם צירים אין גרף אפשרי כי לא יודעים האם לשייך לפונקציה העליונה או התחתונה, $\frac{\partial F}{\partial y}(\pm 1{,}0)=0$



סימון

Jacobian

$$Jacobian - \det J_f(x)\,;\ \ f: U \to \mathbb{R}^n$$

$$\frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(x) \coloneqq \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n} = \det J_f(x)$$

ניתן לרשום את תנאי 2 כך:

2) $\frac{\partial(F_1,\dots,F_m)}{\partial(x_1,\dots,x_m)}(a,b) \neq 0$

הוכחה של המשפט

אינדוקציה לגבי m

$m=1$ הוכחנו, נניח כי המשפט נכון עבור $m-1$

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a,b) \dots \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(a,b) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(a,b) \dots \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(a,b) \end{pmatrix} \neq 0$$

$\text{WLOG}: \Delta_{m-1} \neq 0$

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a,b) \dots \frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}}(a,b) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_1}(a,b) \dots \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m - 1}(a,b) \end{pmatrix} \neq 0$$

מערכת:

$$\begin{cases} \mathrm{F}_1\left(\underbrace{x_1,\dots,x_n}, \overline{y_1,\dots,y_{m-1}}, \underbrace{y_m}\right) = 0 \\ \vdots \\ F_{m-1}\left(\underbrace{x_1,\dots,x_n}, \overline{y_1,\dots,y_{m-1}}, \underbrace{y_m}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial(F_1,\dots,F_{m-1})}{\partial(y_1,\dots,y_{m-1})}(a,b) \neq 0$$

לפי הנחה של אינדוקציה

$\exists U \ni (a,b_m), V \ni (b_1,\dots,b_{m-1})$ כך ש:

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x_1,\dots,x_n,y_m) \\ \vdots \\ y_{m-1} = \varphi_{m-1}(x_1,\dots,x_n,y_m) \end{cases}$$
$$(x,y_m) \in U\,, y' \coloneqq (y_1,\dots,y_{m-1}) \in V$$

$$\varphi_j \in C^r(U)$$
$$F_j(x,\varphi_1(x,y_m),\dots\varphi_{m-1}(x,y_m),y_m) = 0;\ 1 \le j \le m-1 \quad ; \quad (x,y_m) \in U$$

$$\frac{\partial}{\partial y_m}: (*)\ \boxed{\frac{\partial F_j}{\partial y_1}(a,b)\frac{\partial \varphi_1}{y_m}(a,b_m) + \dots + \frac{\partial F_j}{\partial y_{m-1}}(a,b)\frac{\partial \varphi_{m-1}}{y_m}(a,b_m) + \frac{\partial F_j}{\partial y_m}(a,b) = 0}$$

נתבונן במשוואה

$$G(x,y_m) = F_m(x,\varphi_1(x,y_m),\dots\varphi_{m-1}(x,y_m),y_m)$$

$G=0$ משוואה!

$$x=(x_1,\dots,x_n)$$

1) $0=F_m(a,b)=F_m(a,\varphi_1(a,b_m),\dots,\varphi_{m-1}(a,b_m),b_m)=F(a,b_1,\dots,b_{m-1},b_m)=G(a,b_m)=0$

2) $\frac{\partial G}{\partial y_m}(a,b_m)\overset{?}{\neq}0$

נניח כי $\frac{\partial G}{\partial y_m}(a,b_m)=0$

$$(**)\boxed{0=\frac{\partial G}{\partial y_m}(a,b_m)=\frac{\partial F_m}{\partial y_1}(a,b)\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_m}(a,b_m)+\cdots+\frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}}(a,b)\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial y_m}(a,b_m)}$$

בצורה וקטורית, לפי $(**),(*)$:

$$\frac{\partial F}{\partial y_1}(a,b)\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_m}(a,b_m)+\cdots+\frac{\partial F}{\partial y_{m-1}}(a,b)\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial y_m}(a,b_m)+\overset{\text{מקדם}=1}{\frac{\partial F}{\partial y_m}(a,b)}=0\Rightarrow\frac{\partial(F_1,\dots,F_m)}{\partial(y_1,\dots,y_m)}=0-\text{סתירה}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y_m}(a,b_m)\neq0$$

$G(a,b_m)=0$ לפי משפט למקרה $m=1$

$$F_m(x,\varphi_1(x,y_m),\dots,\varphi_{m-1}(x,y_m),y_m)=0=G(x,y_m)\Rightarrow y_m=\varphi_m(x):x\in U_a,y\in V_b$$

$$\exists U_a',V_b':\begin{cases}y_1=\varphi_1(x_1,\dots,x_n,y_m)=\varphi_1\big(x_1,\dots,x_n,\varphi_m(x_1,\dots,x_n)\big)\\ \vdots\\ y_{m-1}=\varphi_{m-1}\big(x_1,\dots,x_n,\varphi_m(x_1,\dots,x_n)\big)\\ y_m=\varphi_m(x_1,\dots,x_n)\end{cases}$$

בסביבה $U_a'\times V_b'\ni(a,b)$

$$\Psi(x):\begin{cases}y_1=\Psi_1(x_1,\dots,x_n)\\ \cdots\\ y_{m-1}=\Psi_{m-1}(x_1,\dots,x_n)\\ y_m=\varphi_m(x_1,\dots,x_n)\end{cases}\Rightarrow y=\Psi(x):(x,y)\in U_a'\times V_b'$$

תרגילים

1) $\begin{cases}xe^{u+v}+2uv=1\\ ye^{u-v}-\frac{u}{1+v}=2x\end{cases}$

הוכח כי $u=u(x,y),v=(x,y),u,v\in C^\infty$ כך ש $u(1,2)=v(1,2)=0$

$(x,y)\in U_{(1,2)};(u,v)\in V_{(0,0)}\quad;\quad a=(1,2)\quad b=(0,0)$

א) $\begin{cases}1e^{0+0}+2*0*0=0\\ 2e^{0-0}-\frac{0}{1+0}=2\end{cases}\Rightarrow F(a,b)=0$

ב) $\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x_1,x_2)}(1,2,0,0)=\det\begin{pmatrix}xe^{u+v}+2v & xe^{u+v}+2u\\ ye^{u-v}-\frac{1}{1+v} & -ye^{u-v}+\frac{u}{(1+v)^2}\end{pmatrix}\Big|_{\substack{x=1\\y=2\\u=0\\v=0}}=\begin{vmatrix}1&1\\1&-2\end{vmatrix}=-3\neq0$

אין פתרון אנליטי אבל יש פתרון.

מה אם הנגזרות?

לפי המשפט הכללי $F(x,y)=0,y=\varphi(x)\Rightarrow F\big(x,\varphi(x)\big)\equiv0\ x\in U_a$

כלל שרשרת:

$$dF_x\big(x,\varphi(x)\big)+dF_y\big(x,\varphi(x)\big)\circ d\varphi_x(x)\equiv0$$

$$d\varphi_x(x) = -\left[dF_y\big(x,\varphi(x)\big)\right]^{-1} \circ dF_x\big(x,\varphi(x)\big)$$
$$J_\varphi(x) = -\left[JF_y\big(x,\varphi(x)\big)\right]^{-1} J_F\big(x,\varphi(x)\big)$$
$$J_\varphi(a) == -\left[JF_y(a,b)\right]^{-1} J_F(a.b)$$

ובתרגיל שלנו:

$$\frac{\partial}{\partial x} : e^{u+v} + xe^{u+v}(u'_x + v'_x) + 2(u'_x v + uv'_x) = 0$$
$$ye^{u-v}(u'_x - v'_x) - (u' \frac{1}{1+v} + u\frac{-v'_x}{(1+v)^2} = 2$$

$$u'_x(1,2) =? \Rightarrow 1 + (u'_x + v'_x) = 0$$
$$2(u'_x - v'_x) - u'_x = 0 \Rightarrow v'_x(1,2) = -1, u'_x(1,2) = 0$$

יה $rpial$