<u>תרגיל:</u> $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מ"מ. $a \in (0,\infty)$, $f: X \to [0,\infty]$ מדידה.

$$0 < C := \int_X f \, d\mu < \infty$$

הוכיחו כי:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X n \log\left(1+\left(\frac{f}{n}\right)^a\right) d\mu = \begin{cases} c & a=1 \\ \infty & 0<a<1 \\ 0 & 1<a<\infty \end{cases}$$

<u>פתרון:</u> נגדיר לכל n:

$$0 \leq f_n := n\log\left(1+\left(\frac{f}{n}\right)^a\right) = \log\left(1+\left(\frac{f}{n}\right)^a\right)^n$$ מדידה.

$$= \log\left(\left(1+\left(\frac{f}{n}\right)^a\right)^{n^a}\right)^{n^{1-a}}$$

וכיון ש- $0 < a < \infty$, מתקיים:

$$\left(1+\frac{f^a}{n^a}\right)^{n^a} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{f^a}$$

לכן

$$(*) \qquad f_n(x) \to \lim_{n\to\infty} \log\left(e^{f^a}\right)^{n^{1-a}}$$

(1) עבור $a=1$: $\forall x: \; f_n(x) \longrightarrow f(x)$ לפי $(*)$

נזכור: לכל $0\leq t$, $1\leq a$ אזי:

$$1+t^a < (1+t)^a < e^{at}$$

לכן

$$(**) \qquad \left(1+\left(\frac{f}{n}\right)^a\right)^n \leq e^{a\frac{f}{n}n} = e^{af}$$

אולם, $a=1$, לכן $\left(1+\frac{f}{n}\right) \leq e^f$

ולכן: $0 \leq f_n(x) \leq f(x)$.

בנוסף $f \in L^1(\mu)$ (כי $0 \leq f$ ו- $C<\infty$).

לכן, לפי משפט ההתכנסות הנשלטת

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu = c$$

(2) עבור $1<a<\infty$: במקרה זה $n^{1-a}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$,

לכן, לפי (*) אם $0\le f(x)<\infty$:

$$f_n(x)\longrightarrow \log\left(e^{(f(x))^a}\right)^0=\log 1=0.$$

בנוסף $f\in L^1(\mu)$ ולכן $0\le f<\infty$ כ״מ.

לכן- $f_n(x)\to 0$ כמ״ע, ולפי (**):

$$\left(1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^a\right)^n \le e^{af(x)}$$

$$\Leftarrow \quad f_n(x)\le a f(x).$$

מכך ש- a קבוע סופי, וגם $f\in L^1(\mu)$ נקבל: $af\in L^1(\mu)$.

לכן, לפי משפט ההתכנסות הנשלטת:

$$\int_X f_n\,d\mu \longrightarrow \int_X 0\,d\mu = 0$$

(3) עבור $0<a<1$: במקרה זה $n^{1-a}\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$.

לכן, אם $f(x)\ne 0$ אזי לפי (*) $f_n(x)\to\infty$.

אחרת אם $f(x)=0$ אזי $f_n(x)\to 0$.

תהי $E:=\{x\mid f(x)\ne 0\}$. מכיון ש: $0<c$: $0<\mu(E)$,

ובמקרים: $\int_X f_n\,d\mu=\int_E f_n\,d\mu$.

$f_n\ge 0$ - מדידות וב- E: $f_n\to\infty$ נקודתית. לכן:

לפי הלמה של פאטו

$$\infty = \infty\,\underset{>0}{\mu(E)} = \int_E \infty\,d\mu \le \underline{\lim}\int_E f_n\,d\mu \le \overline{\lim}\int_E f_n\,d\mu \le \infty$$

ולכן הראנו: $\lim \int_E f_n \, d\mu$ קיים, ושווה ∞.

כנדרש.

<u>תרגיל</u>: $(X,\mathbb{A},\mu)$ מ"מ f_n מדידות - $\mathbb{A}$ וכן חסומות

נניח $\|f_n\|_u<\infty$ $\forall n$. ונניח ש $f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f$ ב-X.

(1) הוכיחו כי $\|f\|_u<\infty$ וכי $\sup_n \|f_n\|_u<\infty$

(2) הוכיחו כי אם $\mu(X)<\infty$ אז $\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu$

(3) תנו דוגמא של מ"מ כך ש- $\mu(X)=\infty$, וסדרת פונ' מדידות - $\mathbb{A}$:

$(f_n)_n$, כך ש $f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f$ אבל $\int f_n \not\to \int f$.

<u>פתרון</u>: (1) <u>$\|f\|_u<\infty$</u>: כיוון שבפרט $\epsilon=1$ קיים n_0 כך שלכל $n_0\le n$

$$\|f_n-f\|_u<1$$

בפרט: $\|f\|_u \le \|f-f_{n_0}\|_u + \|f_{n_0}\|_u < 1+\|f_{n_0}\|_u < \infty$.

<u>$\sup_n \|f_n\|_u<\infty$</u>: כיוון שבפרט $\epsilon=1$ קיים n_0 כך שלכל $n_0<n$

$$\|f_n-f\|_u<1$$

$$\|f_n\|_u \le \|f_n-f\|_u + \|f\|_u < 1+\|f\|_u$$

ולכן:

$$\sup_n \|f_n\|_u \le \max\{\underset{\infty}{\|f_1\|_u}, \underset{\infty}{\|f_2\|_u}, \dots, \underset{\infty}{\|f_{n_0}\|_u}, \underset{\infty}{1+\|f\|_u}\} < \infty$$

(2) יהי $C=\sup_n \|f_n\|_u$. לפי (1): $C<\infty$.

נכון, אם $\mu(X)<\infty$ אז $C\in L^1(\mu)$: $\int_X |C| \, d\mu = C\mu(X) < \infty$.

$f_n \xrightarrow{\text{קמ"ש}} f$ בפרט, $\forall x\in X: f_n(x)\to f(x)$, ו-

$$|f_n(x)| \le \|f_n\|_u < C$$

ולכן, לפי משפט ההתכנסות הנשלטת: $\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu$

(3) תהי $f_n : X \to \mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f_n(x) = \frac{1}{n}$ $\forall x \in X$

אז: f_n מדידה - $\mathbb{A}$ (קבועה) $f_n \to f$ במ"ש ב X

כאשר $f \equiv 0$.

$$\forall n \quad \int_X f_n \, d\mu = \frac{1}{n} \mu(X)$$

$$\int_X f \, d\mu = 0$$

לכן אם $\mu(X) = \infty$ נקבל דוגמה זו:

$$\infty = \int_X f_n \, d\mu \not\to \int_X f \, d\mu = 0$$

תרגיל: חשבו:

$$(*) \quad \int_0^1 \int_0^\infty \frac{y \arctan(xy)}{(1+x^2y^2)(1+y^2)} \, dy \, dx$$

פתרון: האינטגרנד מדיד ואי שלילי ב $[0,1] \times [0,\infty)$

לכן, לפי משפט טוני (עבור מרחבי מידת לבג על $[0,1]$ ו $[0,\infty)$),

האינטגרל $(*)$ שווה ל-

$$\int_0^\infty \left(\int_0^1 \left(y \frac{\arctan(xy)}{1+x^2y^2} \, dx \right) \frac{dy}{1+y^2} \right) =$$

(בהחלפת משתנים: $u = \arctan(xy)$)

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^{\arctan y} u \, du \right) \frac{dy}{1+y^2} = \int_0^\infty \frac{1}{2} \frac{\arctan^2 y}{1+y^2} \, dy =$$

(החלפת משתנים $v = \arctan y$)

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} v^2 \, dv = \frac{\pi^3}{48}$$

תרגיל: יהי $(X, \mathbb{A}, \mu)$ מ"מ.

תהי $S = \left\{ s \;\middle|\; \begin{array}{l} s: X \to \mathbb{R} \text{ פשוטה} \\ \mu(\{x \mid s(x) \neq 0\}) < \infty \end{array} \right\}$

א) S מ"ו מעל $\mathbb{R}$. (תרגיל לבד)

ב) לכל $p \in [1,\infty)$:

$$S = \{ t \mid t \in L^p(\mu) \text{ פשוטה} \}$$

הוכחה:

ב) תהי $s: X \to \mathbb{R}$ פשוטה, אזי $s = \sum_{j=1}^{n} c_j I_{E_j}$

כאשר: $E_j \in \mathbb{A}$ זרות בזוגות, $c_j \in \mathbb{R}$.

לכן:
$$|s|^p = \sum_{j=1}^{n} |c_j|^p I_{E_j}$$

$$\Rightarrow \int_X |s|^p \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} |c_j|^p \mu(E_j)$$

$$s \in L^p \iff \forall 1 \leq j \leq n \; \left(c_j \neq 0 \Rightarrow \mu(E_j) < \infty\right)$$

$$\iff \mu\Big(\bigcup_{\substack{1 \leq j \leq n \\ c_j \neq 0}} E_j\Big) < \infty$$

אולם
$$\bigcup_{\substack{1 \leq j \leq n \\ c_j \neq 0}} E_j = \{x \mid s(x) \neq 0\}$$

לכן $s \in S \iff s \in L^p(\mu)$.

ג) לכל $p \in [1,\infty)$ S צפופה ב $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$