פתרון תרגיל 9 – מבוא לאנליזה 1

1. נתון כי $f(x)$ רציפה בסביבת הנקודה $x=1$, $f(1)=5$. הוכיחו כי הפונקציה $g(x)=(x-1)f(x)$ גזירה בנקודה $x=1$. מהי $g'(1)$?

פתרון: לפי הגדרת הנגזרת, עלינו להראות שהגבול הבא קיים (וסופי):

$$L=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(1+\Delta x)-g(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\cdot f(1+\Delta x)-0\cdot f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(1+\Delta x)=f(1)=5$$

(השוויון הלפני אחרון הוא לפי רציפות $f(x)$ בנקודה $x=1$). הגבול קיים וסופי, לכן $g(x)$ אכן גזירה בנקודה $x=1$, ו־$g'(1)=5$.

2. האם הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases} xcos\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

רציפה בנקודה $x=0$? גזירה בנקודה $x=0$? (רמז: שאלה 1 מתרגיל 7)

פתרון: תחילה נבדוק רציפות ב־$x=0$:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}xcos\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

כמכפלה של פונקציה חסומה $cos\left(\frac{1}{x}\right)$ בפונקציה x השואפת ל־0.

כיוון ש־$f(0)=0$ מתקיים $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$ ז"א $f(x)$ **רציפה** ב־$x=0$.

כעת נבדוק האם $f(x)$ גזירה ב־$x=0$:

עפ"י הגדרת הנגזרת, צריך לבדוק אם קיים הגבול

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\cdot cos\left(\frac{1}{\Delta x}\right)-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}cos\left(\frac{1}{\Delta x}\right)$$

בשאלה 1 בתרגיל 7 הוכחנו שהגבול הנ"ל לא קיים. לכן $f(x)$ **לא גזירה** בנקודה $x=0$.

3. הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases} x^2sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

גזירה בכל נקודה. מהי $f'(x)$?

פתרון: לכל $x\neq 0$ ניתן לגזור עפ"י כללי הגזירה הרגילים (לא לשכוח את הנגזרת הפנימית– כלל השרשרת!) ולקבל

$$f'(x)=2xsin\left(\frac{1}{x}\right)+x^2cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=2xsin\left(\frac{1}{x}\right)-cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

בנקודה $x=0$ יש לגזור עפ"י ההגדרה:

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2\cdot sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)=0$$

שוב כמכפלת פונקציה חסומה בפונקציה השואפת ל־0.

לכן בסה"כ נקבל

$$f'(x)=\begin{cases}2xsin\left(\frac{1}{x}\right)-cos\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

שאלה למחשבה: האם $f'(x)$ רציפה בנקודה $x=0$? גזירה בנקודה $x=0$?

4. מצאו את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=(x+1)^3$ בנקודה $x=1$.

פתרון: $f(1)=2^3=8$, לכן המשיק עובר בנקודה $(1,8)$.

שיפוע המשיק בנקודה זו הוא $f'(1)$:

$$f'(x)=3(x+1)^2 \;\Rightarrow\; f'(1)=3\cdot 2^2=12$$

כל שנותר הוא למצוא את משוואת הישר המשיק לפי שיפועו והנק' שעליו:

$y-8=12(x-1)$, כלומר $\boldsymbol{y=12x-4}$.

5. גזרו את הפונקציות הבאות (היכן שניתן), היעזרו בכללי גזירה:

א) $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$

$$f'(x)=\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}=\boldsymbol{-\frac{2}{(1+x)^2}}$$

ב) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+2x}$

$$f'(x)=\left((x^2+2x)^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}\cdot(x^2+2x)^{-\frac{2}{3}}\cdot(x^2+2x)'=\boldsymbol{\frac{2x+2}{3\sqrt[3]{(x^2+2x)^2}}}$$

ג) $f(x)=ln(1+sin^2x)$

$$f'(x)=\frac{(1+sin^2x)'}{1+sin^2x}=\frac{2sin(x)cos(x)}{1+sin^2x}=\boldsymbol{\frac{sin(2x)}{1+sin^2x}}$$

ד) $f(x)=x\sqrt{tan(3x)}$

$$f'(x)=\sqrt{tan(3x)}+x\cdot\frac{(tan(3x))'}{2\sqrt{tan(3x)}}=$$

$$=\sqrt{tan(3x)}+\frac{x\cdot\frac{1}{cos^2(3x)}\cdot 3}{2\sqrt{tan(3x)}}=\boldsymbol{\sqrt{tan(3x)}+\frac{3x}{2cos^2(3x)\sqrt{tan(3x)}}}$$

ה) $f(x)=x^{sinx}$

$$f'(x)=(x^{sinx})'=((e^{lnx})^{sinx})'=(e^{lnx\cdot sinx})'=(lnx\cdot sinx)'\cdot e^{lnx\cdot sinx}=$$

$$=(\frac{1}{x}\cdot sinx+lnx\cdot cosx)\cdot(e^{lnx})^{sinx}=\boldsymbol{(\frac{sinx}{x}+lnx\cdot cosx)\cdot x^{sinx}}$$