הרצאה 9

נכתב על ידי נועם יערי

תזכורת

משוואות ליניאריות מסדר גבוה

$$y^{(n)} = a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots a_1(x)y' + a_0(x)y + b(x)$$

- פתרונות משוואה ליניארית הומוגנית מסדר n מהווים מרחב וקטורי ממימד n.
- פתרון כללי למשוואה אי הומוגנית היא מהצורה $y = y_n + y_p$ כאשר y_p פתרון פרטי כלשהו ו - y_n פתרון כללי למשוואה ההומוגנית הקשורה.
- <u>איך לנצל מידע חלקי:</u>
  - <u>הורדת סדר –</u> אם y_0 פותר את המשוואה ההומוגנית מסדר n הקשורה ונציב $y = y_0 \cdot z$
    $\Leftarrow$ אזי z' פותר משוואה ליניארית מסדר $n-1$.
  - <u>וריאציית מקדמים –</u> בהינתן בסיס $\{y_1, \cdots, y_n\}$ למשוואה ההומוגנית הקשורה, זי $y = c_1(x)y_1 + \cdots c_n(x)y_n$ פותר את המשוואה האי הומוגנית $\Leftrightarrow$ $w\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ \vdots \\ c_{(n-1)(x)} \\ c_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$

מבוא לפונקציית גרין

אם L אופרטור דיפרנציאלי מסדר n ורוצים לפתור את המשוואה $L \cdot y = b(x)$ <u>על תת מרחב שבו קיים פתרון יחיד.</u> אזי $y = L^{-1}[b(x)]$ כאשר האופרטור ההופכי L^{-1} הוא מהצורה:

$$\boxed{L^{-1}[b(x)] = \int \overbrace{G(x,t)}^{\text{פונקציית גרין}}\ b(t)dt}$$

הסבר על L:

$$L[f'](x) = f^{(n)}(x) - a_{n-1}(x)f^{(n-1)}(x) - \cdots - a_0(x)f(x)$$
$$L: C^n \to C^0$$

במקרה המיוחד של תת המרחב

$$\mathrm{V} = \{f \in C^n : f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0\}$$

קיים פתרון יחיד למשוואה $Ly = b(x)$. ניתן למצוא אותו בהינתן בסיס של פתרונות הומוגניים באמצעות וריאציית מקדמים.

בכך, אפשר לחשב בצורה מפורשת את פונקציית גרין לבעיית קושי זו.

שאלה

האם ניתן להפוך את L תחת תנאי שפה במקום תנאי התחלה

דוגמה

$$\begin{cases} y'' = b(x) \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \Longrightarrow y' = \int_0^x [b(t)]dt + c_1 \Longrightarrow \text{שוב אינטגרל וחישוב הקבוע בהתאם}$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \Longrightarrow Ly = y'' + y \text{ שאלת ערך עצמי של } \Longrightarrow Ly = -\lambda y$$

משוואות ליניאריות (הומוגניות) עם מקדמים קבועים

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0$$

$$a_0, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$$

דוגמה

$$y'' + a^2 y = 0$$

$$y(x) = A\sin(ax) + B\cos(ax)$$

$$y'' + by'_{\text{ריסון}} + ky, \quad b,k > 0$$

<u>רעיון ראשוני:</u>

ננסה אולי להציב:

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

$$y'(x) = \lambda \cdot e^{\lambda x}$$

$$y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

נציב במשוואה:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ke^{\lambda x} = 0 \Longrightarrow \lambda^2 + b\lambda + k = 0$$

"פולינום אופייני"

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4k}}{2}$$

הערה

אם מקבלים 2 פתרונות ממשיים שונים $\lambda_{1,2}$ אזי פתרון כללי יהיה מהצורה

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

מקרה תת קריטי

שני שורשים מרוכבים צמודים $\lambda = -\frac{b}{2} \pm iw$.

פתרון מעל המרוכבים:

$$y(x) = c_1 e^{\left(-\frac{b}{2}+iw\right)x} + c_2 e^{\left(-\frac{b}{2}-iw\right)x}$$

תרגיל (שימוש בנוסחת אוילר: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$)

$\Leftarrow$ הצבת תנאי התחלה ממשיים $y(0), y'(0) \in \mathbb{R}$ נותן פתרון כללי

$$y(x) = e^{-\frac{b}{2}x}(A \sin wx + B \cos wx)$$

מקרה קריטי של שורש כפול

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$