טופולוגיה תרגול 13 - חזרה למבחן

24 ביוני 2015

נפתור את מועד א' ומועד ב' של תשע"ג.

במבחן יש 5 שאלות, מתוכן יש לבחור 4.

מועד א':

1. יהי M מרחב מטרי קומפקטי, ותהי $A \subseteq M$ אינסופית. הראו שיש ל־A נקודת הצטברות ב־M.

<u>פתרון:</u>

נניח בשלילה שאין ל־A נקודת הצטברות.

לכן, לכל $x \in M$ קיים ε_x עבורו מתקיים:

$$B(x,\varepsilon_x) \cap (A \backslash \{x\}) = \emptyset$$

ואם כן:

$$B(x,\varepsilon_x) \cap A = \begin{cases} \{x\} & x \in A \\ \emptyset & x \notin A \end{cases}$$

לפי הלמה השימושית, $\{B(x,\varepsilon_x)\}_{x\in M}$ הוא כיסוי פתוח של M.

מכיוון ש־M קומפקטי, יש לו תת כיסוי סופי, כלומר קיימים $x_1, x_2, \dots x_m \in M$ כך ש:

$$\bigcup_{i=1}^{m} B(x_i,\varepsilon_{x_i}) = M$$

ולכן:

$$A = A \cap M = A \cap \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon_{x_i}) = \bigcup_{i=1}^{m} (A \cap B(x_i, \varepsilon_{x_i}))$$

ולפי מה שהסברנו על החיתוכים האלו, נקבל:

$$|A| = \left| \bigcup_{i=1}^{m} (A \cap B(x_i, \varepsilon_{x_i})) \right| \leq m < \infty$$

וקיבלנו ש$-A$ סופית וסתירה. לכן ל$-A$ יש נקודת הצטברות.

2. יהי X מ"ט ויהי $\sim$ יח"ש על X. תהי $\rho : X \to {}^{X}\!/\!_{\sim}$ ההעתקה השולחת כל איבר למחלקת השקילות שלו.

א. הראו ש$-\rho$ רציפה.

ב. יהי Y מ"ט ותהי $f : {}^{X}\!/\!_{\sim} \to Y$ פונקציה. הראו ש$-f$ רציפה אם ורק אם $f \circ \rho$ רציפה.

<u>פתרון:</u>

א. כדי להראות ש-ρ רציפה, יש להראות שאם $U \subseteq {}^{X}\!/\!_{\sim}$ פתוחה אז $\rho^{-1}(U) \subseteq X$ פתוחה.

מהגדרת טופולוגיית המנה, $U \subseteq {}^{X}\!/\!_{\sim}$ פתוחה אם ורק אם $\rho^{-1}(U) \subseteq X$ פתוחה, ולכן בוודאי ש$-\rho$ רציפה.

ב. אם f רציפה, מכיוון שגם ρ רציפה (לפי סעיף א') נקבל ש$-f \circ \rho$ רציפה כהרכבת רציפות.

לכיוון השני, נניח ש$-f \circ \rho$ רציפה. נניח בשלילה ש$-f$ לא רציפה.

לכן, קיימת $U \subseteq Y$ פתוחה עבורה $f^{-1}(U) \subseteq {}^{X}\!/\!_{\sim}$ לא פתוחה.

מכיוון ש$-f \circ \rho$ רציפה, $(f \circ \rho)^{-1}(U) \subseteq X$ פתוחה, כלומר: $\rho^{-1}(f^{-1}(U)) \subseteq X$ פתוחה.

מהגדרת טופולוגיית המנה, נקבל שגם $f^{-1}(U) \subseteq {}^{X}\!/\!_{\sim}$ פתוחה וסתירה!

לכן f רציפה.

3. יהי $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף של מ"ט.

א. הראו שאם כל מרחב X_α הוא האוסדורף, גם $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ האוסדורף.

ב. הראו שאם I אינסופית ובכל מרחב X_α יש לפחות שתי נקודות, $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ אינו דיסקרטי.

<u>פתרון:</u>

א. תהיינה $a,b\in\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ שתי נקודות שונות.

לכן, קיים $\beta\in I$ עבורו $a_\beta\neq b_\beta$.

מכיוון ש$-X_\beta$ האוסדורף, קיימות $U_\beta,V_\beta\subseteq X_\beta$ פתוחות וזרות כך ש:

$$a_\beta\in U_\beta, b_\beta\in V_\beta$$

כעת, נתבונן בקבוצות הבאות:

$$(U)_\alpha=\begin{cases} U_\beta & \alpha=\beta \\ X_\alpha & \alpha\neq\beta\end{cases}$$

$$(V)_\alpha=\begin{cases} V_\beta & \alpha=\beta \\ X_\alpha & \alpha\neq\beta\end{cases}$$

כלומר הקבוצה U היא בכל קואורדינטה כל המרחב למעט הקואורדינטה β בה היא U_β.

באופן דומה הקבוצה V היא בכל קואורדינטה כל המרחב למעט הקואורדינטה β בה היא V_β.

הקבוצות שלנו הן קבוצות בסיס בטופולוגיית המכפלה ובוודאי שהן פתוחות.

$a\in U, b\in V$ ומכיוון שהקבוצות U_β,V_β זרות גם U,V זרות.

כל שתי נקודות אפשר להפריד ע"י קבוצות פתוחות ולכן המרחב $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ האוסדורף.

ב. נתבונן בנקודון $\{a\}\subseteq\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$. האם הוא קבוצה פתוחה?

כל קבוצה פתוחה היא איחוד של קבוצות בסיס. בנקודון יש רק איבר אחד, ולכן אם הוא קבוצה פתוחה פירוש הדבר שהוא בעצמו קבוצת בסיס.

בקבוצת בסיס, בכל קואורדינטה α למעט מספר סופי של אינדקסים יש את כל המרחב המתאים X_α.

במרחב X_α יש לכל הפחות שתי נקודות, ולעומת זאת בנקודון יש איבר אחד בלבד בכל קואורדינטה, ולכן הנקודון לא יכול להיות קבוצת בסיס ובטח שהוא לא קבוצה פתוחה.

לכן יש במרחב קבוצות שאינן פתוחות ולכן מרחב אינו דיסקרטי.

4. כזכור, הישר של סורגנפריי הוא הקבוצה $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה שבה קבוצה פתוחה היא איחוד של קטעים מהצורה $[a,b)$. נסמן ב$-\mathbb{R}_S$ את הישר של סורגנפריי.

א. הראו שאם $A \subseteq \mathbb{R}_S$ תת מרחב בן יותר מנקודה אחת אז A אינו קשיר.

ב. נסמן כרגיל את $\mathbb{R}$ להיות הישר עם הטופולוגיה הרגילה. הראו שפונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_S$ היא רציפה אם רק אם היא קבועה.

<u>פתרון:</u>

א. ב$-A$ יש שתי נקודות שונות a,b. אנו רוצים למצוא קבוצות פתוחות זרות ולא ריקות שאיחודן יהיה A.

נניח בה"כ ש$-a<b$, ונתבונן בקבוצות:

$$A = ((-\infty,b)\cap A)\cup([b,-\infty)\cap A)$$

הקבוצות פתוחות ב$-A$ מכיוון שהקבוצות $(-\infty,b),[b,\infty)$ פתוחות ב$-\mathbb{R}_S$.

הקבוצות לא ריקות מכיוון ש$-a\in(-\infty,b)\cap A, b\in[b,-\infty)\cap A$.

קל לראות שהקבוצות זרות ואיחודן הוא A. לכן A לא קשיר.

ב. אם f קבועה ברור שהיא רציפה (חשבו מה כבר יכולה להיות תמונה הפוכה).

לכיוון השני, נניח ש$-f$ רציפה. מכיוון ש$-\mathbb{R}$ קשיר, גם $f(\mathbb{R})\subseteq\mathbb{R}_S$ קשיר.

לפי סעיף א', תת מרחב של הישר של סורגנפריי בן יותר מנקודה אחת אינו קשיר, ולכן $|f(\mathbb{R})|=1$, ולכן f קבועה.

5. כזכור S^1 מסמל את המעגל $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$.

תהי $f : S^1\times S^1\to\mathbb{R}$ רציפה. הראו שתמונת f היא קטע סגור.

<u>פתרון:</u>

S^1 סגור וחסום ב$-\mathbb{R}^2$ ולכן קומפקטי.

לכן, גם $S^1 \times S^1$ קומפקטי. f רציפה ולכן גם $f(S^1 \times S^1) \subseteq \mathbb{R}$ קומפקטית, ולכן סגורה וחסומה.

מאידך גיסא, S^1 קשיר (כי הוא קשיר מסילתית, כי הוא תמונה רציפה של קטע סגור שהוא קשיר...) ולכן גם $S^1 \times S^1$ קשיר.

f רציפה ולכן גם $f(S^1 \times S^1) \subseteq \mathbb{R}$ קשירה.

הקבוצות הקשירות ב-$\mathbb{R}$ הם קטעים וקרנות. הקבוצות הקשירות והחסומות הם קטעים, והקבוצות הקשירות, החסומות והסגורות הם קטעים סגורים.

תמונת f היא קבוצה קשירה, סגורה וחסומה ולכן היא קטע סגור.

מועד ב':

1. יהיו $(M,d),(N,\rho)$ מ"ט, תהי $f : M \to N$ ותהי $a \in M$.

הראו ש-f רציפה ב-a אם ורק אם לכל סדרת נקודות $\{x_n\} \subseteq M$ המקיימת $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ מתקיים $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a)$.

<u>פתרון:</u>

נניח ש-f רציפה ב-a. תהי $\{x_n\}$ סדרת נקודות המתכנסת ל-a.

יהי $\varepsilon > 0$. f רציפה ב-a ולכן קיים $\delta > 0$ עבורו:

$$f(B(a,\delta)) \subseteq B(f(a),\varepsilon)$$

מצד שני, $x_n \longrightarrow a$ ולכן קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים: $x_n \in B(a,\delta)$ ולכן :

$$f(x_n) \subseteq B(f(a),\varepsilon)$$

ופירוש הדבר $f(x_n) \longrightarrow f(a)$.

לכיוון השני, נניח ש־f לא רציפה ב-a.

מכיוון ש-f לא רציפה ב-a, קיים $\varepsilon > 0$ לכל n קיים x עבורו $d(x,a) < \frac{1}{n}$ אך $\rho(f(x),f(a)) \geq \varepsilon$. לכל n נסמן את ה-x המתאים ב-x_n.

נתבונן בסדרה $\{x_n\}$. מכיוון שלכל n, $0 \leq d(x_n,a) \leq \frac{1}{n}$ ולכן: $d(x_n,a) \longrightarrow 0$ (סנדוויץ') ולכן $x_n \longrightarrow a$.

מצד שני, $\{f(x_n)\}$ לא מתכנסת ל-$f(a)$ כי $\rho(f(x), f(a)) \geq \varepsilon$.

ולכן אם לכל סדרת נקודות $\{x_n\} \subseteq M$ המקיימת $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ מתקיים $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a)$, f רציפה ב-a (א' גורר ב' אם ורק אם לא ב' גורר לא א').

2. יהי X מ"ט האוסדורף ויהי $A \subseteq X$ תת מרחב קומפקטי. הראו ש-A סגור.

<u>פתרון:</u>

נראה ש-A^c פתוחה (מרחב קומפקטי מוגדר ע"י תכונה של קבוצות פתוחות ולכן יהיה נוח לעבוד עם פתוחות).,

יהי $x \in A^c$, נראה שקיימת קבוצה פתוחה U המקיימת $x \in U \subseteq A^c$.

נרצה להשתמש בתכונת האוסדורף. אם כן, לכל $a \in A$ קיימות קבוצות פתוחות U_a, V_a זרות עבורן:

$$a \in U_a, x \in V_a$$

לפי הלמה השימושית, $A \subseteq \bigcup_{a\in A} U_a$ (ולאו דווקא שוויון, מכיוון ש-U_a פתוחות ב-X ולאו דווקא ב-A).

מכיוון ש-A קומפקטי (ובעזרת הקשר בין כיסוי של פתוחות בתת המרחב לבין כיסוי של פתוחות מהמרחב הגדול), יש לכיסוי תת כיסוי סופי:

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i}$$

נתבונן ב-$\bigcap V_{a_i}$. זהו חיתוך סופי של פתוחות ולכן פתוח. כמו כן, מכיוון ש-$x \in V_{a_i}$ לכל i, $x \in \bigcap V_{a_i}$.

מכיוון שלכל i, $U_{a_i} \cap V_{a_i} = \emptyset$, נקבל :

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i}\right) \bigcap \left(\bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i}\right) = \emptyset$$

ומכיוון ש-$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i}$, מתקיים גם: $A \bigcap \left(\bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i}\right) = \emptyset$, כלומר $\bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i} \subseteq A^c$.

$\bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i}$ היא הקבוצה הפתוחה המבוקשת.

3. יהיו X,Y מ"ט.

א. תהיינה $A\subseteq X, B\subseteq Y$ קבוצות **סגורות.** הראו שהקבוצה $A\times B\subseteq X\times Y$ סגורה.

ב. תהיינה $A\subseteq X, B\subseteq Y$ קבוצות **כלשהן.** הראו ש$-cl(A\times B)=cl(A)\times cl(B)$.

<u>פתרון:</u>

א. בטופולוגיית המכפלה, שמוגדרת ע"י בסיס, יותר נוח לדבר על קבוצות פתוחות.

לכן, נראה ש$-(A\times B)^c$ פתוחה.

מי נמצא ב$-(A\times B)^c$? זוגות סדורים שהאיבר הראשון שלהם לא שייך ל$-A$ והאיבר השני שלהם יכול להיות כל דבר, וזוגות סדורים שהאיבר השני שלהם לא שייך ל$-B$ והאיבר הראשון יכול להיות כל דבר. כלומר:

$$(A\times B)^c=(A^c\times Y)\bigcup(X\times B^c)$$

הקבוצות האלו הן קבוצות בסיס בטופולוגיית המכפלה (כי הקבוצות A,B סגורות ולכן המשלימות A^c,B^c פתוחות) ולכן פתוחות, ולכן גם $(A\times B)^c$ פתוחה כאיחוד של פתוחות.

לכן $A\times B$ סגורה.

ב. $\supseteq$: $cl(A),cl(B)$ הן קבוצות סגורות ומסעיף א' נקבל שגם $cl(A)\times cl(B)$ סגורה.

מכיוון ש$-A\subseteq cl(A), B\subseteq cl(B)$ מתקיים $A\times B\subseteq cl(A)\times cl(B)$.

$cl(A\times B)$ היא הסגורה המינימלית המכילה את $A\times B$ ולכן $cl(A)\times cl(B)\supseteq cl(A\times B)$.

$\subseteq$: יהי $(a,b)\in cl(A)\times cl(B)$. תהי O סביבה בסיסית של (a,b).

כלומר, קיימות $U_1\subseteq X, U_2\subseteq Y$ פתוחות כך ש: $O=U_1\times U_2$.

מכיוון ש$-a\in cl(A), b\in cl(B)$, $U_1\cap A, U_2\cap B\neq\emptyset$. לכן:

$$(U_1\times U_2)\cap(A\times B)\neq\emptyset$$

זה נכון לכל סביבה בסיסית, ולכן נכון לכל סביבה ולכן $(a,b)\in cl(A\times B)$.

לכן $cl(A)\times cl(B)\subseteq cl(A\times B)$ ובסך הכל $cl(A)\times cl(B)=cl(A\times B)$.

4. בהינתן קבוצה X, תהי T הטופולוגיה הקו־סופית על X, כלומר: $T = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq X : |A^c| < \aleph_0\}$.

א. עבור אלו קבוצות X מתקיים ש$-(X,T)$ קשיר?

ב. עבור אלו קבוצות X מתקיים ש$-(X,T)$ האוסדורף?

<u>פתרון:</u>

א. אם $|X| \leq 1$, ברור שהמרחב קשיר.

אם $2 \leq |X| < \aleph_0$, המרחב שלנו הוא דיסקרטי (הרי מזלים של כל קבוצה הוא סופי) ולכן לא קשיר.

אם $\aleph_0 \leq |X|$, לכל U,V פתוחות מתקיים $|(U \cap V)^c| = |U^c \cup V^c| \leq |U^c| + |V^c| < \aleph_0$ כלומר המשלים של חיתוכן סופי, ומכיוון שהמרחב אינסופי חיתוכן אינסופי ובוודאי שאינו ריק.

אם כן, אין בכלל שתי קבוצות פתוחות לא ריקות וזרות, ולכן בוודאי שאין קבוצות פתוחות זרות ולא ריקות שאיחודן הוא X ולכן X קשיר.

ב. אם X סופי הוא דיסקרטי ולכן בוודאי שהוא האוסדורף.

אם X אינסופי, מכיוון שאין קבוצות פתוחות לא ריקות וזרות (כמו שראינו בסעיף א') לא נוכל להפריד אף זוג נקודות ע"י קבוצות פתוחות ולכן המרחב בוודאי אינו האוסדורף.

5. יהיו X,Y מ"ט ותהי $f : X \to Y$ פונקציה רציפה.

הגרף של f הוא תת המרחב של $X \times Y$ באופן הבא:

$$\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

הראו ש$-\Gamma$ הומיאומורפי ל$-X$.

<u>פתרון:</u>

הסתכלו בתרגול 7.