

מועד א', תשע"ו

מרצים: פרופ' יבגני פלוטקין, פרופ' בוריס קוניאבסקי

מתרגלים: אחיה בר-און, עדי לוגסי, תמר נחשוני

הנחיות:

בפרק א' יש לענות על שתיים מתוך שלוש השאלות. הניקוד על כל שאלה הוא 25 נק'. פרטו את תשובותיכם. בפרק ב' יש לענות על 10 מתוך 12 השאלות. ענו "כן" על כל טענה נכונה ו"לא" על כל טענה לא נכונה. אין חובה לפרט את תשובותיכם. הניקוד על כל שאלה הוא 5 נק'. יש לסמן את בחירתכם באופן ברור. במקרה שלא תסומנה השאלות הנבחרות, תיבדקנה שתיים הראשונות מפרק א' ועשר הראשונות מפרק ב'. משך הבחינה 150 דק'. חומר עזר-מחשבון.

פרק א'

שאלה 1 (25 נק')

העתקות  $T_i: R^4 \rightarrow R^4 (i = 1, 2, 3)$  מוגדרות ע"י הנוסחאות הבאות:

$$T_3 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + b \\ a + c \\ c^2 \\ 0 \end{pmatrix}, T_2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b + 1 \\ c + 2 \\ d + 3 \end{pmatrix}, T_1 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix}$$

- א. אילו מהעתקות הן העתקות ליניאריות? (5 נק')  
 ב. עבור כל העתקה ליניארית  $T_i$  מצאו את המטריצה המייצגת  $A_i = [T_i]_E$  יחסית לבסיס סמנדרטי

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- ג. חשבו את הפולינום האופייני של  $A_i$ . (5 נק')  
 ג. עבור כל העתקה ליניארית  $T_i$  החליטו האם היא לכסינה. אם כן, מצאו בסיס של  $R^4$  המורכב מוקטורים עצמיים של  $A_i$ . מצאו מטריצה הפיכה  $P_i$  ומטריצה אלכסונית  $D_i$  כך ש-  
 $A_i = P_i D_i P_i^{-1}$ . (15 נק')

שאלה 2 (25 נק')

יהי  $V = R_2[x]$  מרחב הפולינומים מעל  $R$  ממעלה 2 לכל היותר. תהי  $T: V \rightarrow V$  העתקה המוגדרת ע"י הנוסחא  $T(f) = f'' - 2f'$  (הן הנגזרת הראשונה והשנייה של פולינום  $f$ ).

- א. הראו כי  $T$  היא העתקה ליניארית וחשבו  $\dim(Ker(T))$ ,  $\dim(Im(T))$ . (5 נק')  
 ב. האם  $T$  לכסינה? (10 נק')  
 ג. חשבו את הפולינום המינימלי  $m_T(x)$ . (10 נק')

שאלה 3 (25 נק')

יהי  $V = R^3$  מרחב שורות עם מכפלה פנימית המוגדרת ע"י הנוסחא

$$\langle (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \rangle = \alpha_1 \beta_1 + 2\alpha_2 \beta_2 + 3\alpha_3 \beta_3$$

- א. הראו כי זו אכן מכפלה פנימית. (5 נק')
- ב. בעזרת תהליך גראם-שמידט בנו בסיס אורתונורמלי של  $V$  (יחסית למכפלה פנימית זו) החל מ-  $v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,0,0)$ . (10 נק')
- ג. חשבו את ההטל של  $u = (1,2,3)$  על  $W = \text{span}(v_1, v_2)$ . (10 נק').

### פרק ב' (שאלות "כן/לא")

#### שאלה 4

אם  $A$  היא מטריצה מגודל  $10 \times 10$  ומטריצה  $A'$  מתקבלת מ- $A$  ע"י הרשמה של כל העמודות של  $A$  בסדר הפוך, אזי  $\det(A') = -\det(A)$ .

#### שאלה 5

קיימות מטריצה  $A$  מגודל  $7 \times 1$  ומטריצה  $A'$  מגודל  $1 \times 7$  כך שהמטריצה  $AA'$  הפיכה.

#### שאלה 6

אין העתקות לינאריות הפיכות  $R^{2016} \rightarrow R^{5776}$ .

#### שאלה 7

יהיה  $V$  מרחב וקטורי, ותהי  $\varphi: V \rightarrow V$  העתקה לינארית. אזי  $\varphi$  היא העתקת על אם ורק אם  $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = 0$ .

#### שאלה 8

אם הפולינום האופייני של מטריצה  $A$  הוא  $p_A(x) = x^2 + 1$ , אזי  $A$  הפיכה.

#### שאלה 9

תהי  $A^t$  המטריצה המשוחלפת למטריצה ריבועית  $A$ . אזי כל וקטור עצמי של  $A$  הוא גם וקטור עצמי של  $A^t$ .

#### שאלה 10

אם הריבוי האלגברי של כל ערך עצמי של מטריצה ריבועית  $A$  שווה ל-1, אזי  $A$  לכסינה.

#### שאלה 11

יהי  $m_A(x)$  הפולינום המינימלי של מטריצה ריבועית  $A$ . אם  $m_A(x) = x^3$ , אזי המטריצה  $I - A$  הפיכה ( $I$  היא מטריצת היחידה).

#### שאלה 12

אם מטריצה  $A^2$  לכסינה, אזי  $A$  לכסינה גם היא.

#### שאלה 13

אם הפולינום האופייני של  $A$  שווה לפולינום האופייני של  $A'$ , אזי כל צורת ז'ורדן של  $A$  היא גם צורת ז'ורדן של  $A'$ .

#### שאלה 14

יהי  $V$  מרחב מכפלה פנימית,  $\dim(V) \geq 2$ ,  $u, v \in V$ . אם  $\|u\| = \|v\| = \|u + v\|$ , אזי  $u = v = 0$ .

#### שאלה 15

יהי  $V$  מרחב מכפלה פנימית,  $u, v, w \in V$ . אם  $u$  אורתוגונלי ל- $v$  ו- $v$  אורתוגונלי ל- $w$ , אזי  $u$  לא יכול להיות אורתוגונלי ל- $w$ .

**בהצלחה!**