הרצאה XII- אינפי 1

פרק 4: גבול של פונקציות בנקודה

נניח $A \subset R$ וקיימת העתקה $f: A \to R$. ז"א שלכל x בA קיים y כך שמתקיים f(x)=y. ניתן להגדיר: $f: N \to R\ ;\ x_n = f(n)$ אם N=A.

<u>נקודת הצטברות</u>: הגדרה: $A \subset R$. אומרים ש $p \in \bar{R}$ נקודת הצטברות (נקודת גבול) אם מתקיים $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in A, x \neq p : x \in U_\varepsilon(P)$.

נגדיר גם $x \in U_\varepsilon(P) \backslash \{P\} \coloneqq U_\varepsilon^0(P)$. לכן $LimA = \left\{\begin{matrix} \text{נק' הצטברות} \\ A \text{ של} \end{matrix}\right\}$.

דוגמאות:

1. $A=(0,1)$ אזי $LimA = [0,1]$.
2. $A = \{0\} \cup \{1\}$ אזי $LimA = \phi$.
3. נניח ש $N=A$. מתקיים כי $LimA = \{+\infty\}$.

לשים לב: $p \in A \ \nrightarrow p \in LimA,\ \ p \in LimA \ \nrightarrow p \in A$.

הגדרה: אם $p \in A$ אבל $p \neg\in LimA$ נגיד שP נקודה מבודדת. (*isolated point*).

<u>משפט</u>: של בולצאנו ווירשטרס. תהי $A \subset R$ קבוצה אינסופית.

1. אזי קיימת נקודת הצטברות $p \in \bar{R}$.
2. אם A חסומה, אזי קיימת נקודת הצטברות p ממשית.

הוכחה: 1. אם A קבוצה לא חסומה, נניח לא חסומה מלעיל. $\forall \varepsilon > 0 \varepsilon\ \exists x_\varepsilon \in A :\ x_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$ ולכן $x_\varepsilon \in U_\varepsilon(+\infty)$.

3. נניח שA חסומה, לכן $n \neq m$, $x_n \neq x_m$, $\exists x_n \in A$ A חסומה, לכן הסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה. לפי למה $B.W.$ קיימת תת סדרה שמקיית $x_{n_k} \to p \in R$ לכן $p \in LimA$.

<u>הגדרת הגבול לפי קושי:</u>

הגדרה: $A \subset R$ וקיימת העתקה $f: A \to R$, וגם $p \in LimA$.

אומרים ש$l \in \bar{R}$ הוא גבול של f בנקודה p, אם$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A, x \in U_\delta(P) : f(x) \in U_\varepsilon(l)$.

ז"א $l \in R$, $l = \lim_{x \to P} f(x)$.

או במילים אחרות: $l = \lim_{x \to P} f(x)$ אז $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A, x \neq p :\ |x - p| < \delta$ ומכאן $|f(x) - l| < \varepsilon$.

דוגמא: $f(x) = \begin{cases} 0\ , x \neq 0 \\ 1\ , x = 0 \end{cases}$ ואז ע"פ הגדרה $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

כעת נביט בדבר הבא ונבין את משמעותו: $l \in R$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ ובהגדרה שלנו: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A :\ x > \frac{1}{\delta}$. ומכאן נובע כי מתקיים $|f(x) - l| < \varepsilon$ אפשר גם להגיד במקום $\exists E\ \forall x \in A : x > E\ \implies |f(x) - l| < \varepsilon$.

תכונות:

<u>משפט</u>: אם קיים $l \in R$, $l = \lim_{x \to P} f(x)$ אזי f חסומה מקומי סביב p. $\exists \delta > 0\ C \geq 0 :\ \forall x \in U_\delta\ (p) \backslash \{p\}$ ומתקיים עבור הפונקציה שC $|f(x)| \leq C$.

הוכחה: $l \in R$, ולכן $U_1(l) = (l-1, l+1)$, ומתקיים $\exists \delta > 0\ \forall x \in A, x \neq p:\ x \in U_\delta(p)$ ז״א $f(x) \in (l-1, l+1)$, ומכאן נובע כי $l - 1 < f(x) < l + 1$. מ.ש.ל.

<u>הגדרה של גבול לפי *Heine*</u>:

הגדרה: $p \in LimA$ אומרים ש$x \in A$, $l = \lim_{x \to P} f(x)$ לפי *Heine* . אם מתקיים התנאי $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in A, x_n \neq p, \lim_{n\to\infty} x_n = p \to \lim_{x\to\infty} f(x_n) = l$.

<u>משפט</u>: $l = \lim_{x \to P} f(x)$ אוי״א $l = \lim_{x \to P} f(x)$ לפי היינה.

הוכחה:

$\Leftarrow$: נניח ש$l = \lim_{x \to P} f(x)$. אזי $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in A, x_n \neq p, \lim_{n\to\infty} x_n = p$.

יהי $\varepsilon > 0$. לכן $\exists \delta > 0 \forall x \in A, x \neq p, x \in U_\delta(P): f(x) \in U_\varepsilon(l)$ ומכאן ש $x_n \to p$.

לכן מתקיים כי $\exists \bar{n}\ \forall n \geq \bar{n}: x_n \in U_\delta^0(p)$ ומכאן $f(x_n) \in U_\varepsilon(l)$. קיבלנו ש$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n}\ \forall n \geq \bar{n}: f(x_n) \in U_\varepsilon(l)$ ולכן ע״פ הגדרת הסביבה מתקיים $l = \lim_{x \to P} f(x)$.

$\Rightarrow$: נניח ש$x \in A$, $l = \lim_{x \to P} f(x)$ לפי *Heine*. נניח ש$x \in A$, $l = \lim_{x \to P} f(x)$ לא נכון לפי קושי.

אזי, $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0 \exists x = x_\delta: x_\delta \in A, x_\delta \neq p, x_\delta \in U_\delta(P). f(x_\delta) \notin U_\varepsilon(l)$. נגדיר $\delta_n = \frac{1}{n}$ ולכן $x_{\delta_n} := x_n$ אם נסתכל מה יצא מתקיים כי $x_n \in A, x_n \neq p, x_n \in U_{\frac{1}{n}}(P), f(x_n) \notin U_\varepsilon(l)$מכאן ש$p = \lim_{n\to\infty} x_n$ וגם $x_n \neq p$ אבל $f(x_n) \notin U_\varepsilon(l)$. לכן לא נכון ש $l = \lim_{x \to P} f(x)$ לפי היינה, בסתירה. לכן בהכרח ש$x \in A$, $l = \lim_{x \to P} f(x)$ לפי קושי. מ.ש.ל.

<u>תנאי קושי</u>:

<u>משפט</u>: $A \subset R$, קיימת העתקה $f: A \to R$, וגם $p \in LimA$. קיים גבול סופי ל*f(x)* אוי״א מתקיים התנאי בשורה הבאה:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x', x'' \in A, x', x'' \in U_\delta(l) \backslash \{p\}\ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

הוכחה:

$\Leftarrow$:נניח שקיים גבול $l = \lim_{\substack{x \to p \\ x \in A}} f(x)$. נקבע $\varepsilon > 0$. ולכן $\exists \delta > 0:\ \forall x \in A, x \neq p\ x \in U_\delta(p)$ ולכן $|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$. ומכאן נובע $x', x'' \in U_\delta(l) \backslash \{p\}$ ומתקיים ע״פ אי שיוויון המשולש $|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - l| + |l - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

$\Rightarrow$: נניח שתנאי קושי מתקיים: נבדוק שקיים גבול לפי היינה. $x_n \in A, x_n \to_{n\to\infty} p, x_n \neq p$. האם $\{f(x_n)\}$ סדרת קושי? ע״פ מה שהגדרנו להיות תנאי קושי: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x', x'' \in A, x', x'' \in U_\delta(l) \backslash \{p\}\ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ וידוע כי $x_n \to_{n\to\infty} p$, כאשר $x_n \neq p$. כעת נוכיח: $\{f(x_n)\}$ סדרת קושי. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x', x'' \in A, x', x'' \in U_\delta(l) \backslash \{p\}\ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ ע״פ הגדרה. מכאן ש$p = \lim_{n\to\infty} x_n$ וע״פ הגדרה $\exists \bar{n}\ \forall n, m \geq \bar{n}: x_n, x_m \in U_\delta^0(p)$. נסמן $x' = x_n, x'' = x_m$. לכן $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ ולכן ע״פ הגדרה $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי. ע״פ מבחן קושי לסדרות, $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

נוכיח כי כל הגבולות שווים: נניח כי $x_n, y_n \to_{n\to\infty} p$ ומתקיים $f(x_n) \to_{n\to\infty} l_1$ וגם $f(y_n) \to_{n\to\infty} = l_2$.

נגדיר: $\{Z_n\} = x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots \to p$ ומתקיים $f(Z_n) \to_{n\to\infty} l_3$. אבל בגלל ש$\{x_n\} \subset \{Z_n\}$ מתקיים $l_3 = l_1$ ובאופן דומה גם $l_2 = l_1$ קיבלנו כי כל הגבולות שווים, ולכן l הוא הגבול. ז״א $\exists \lim_{\substack{x \to p \\ x \in A}} f(x) = l$.

<u>מעבר גבול באי שיוונים</u> :

<u>משפט</u> : (יציבות של אי שייויונים ממש)

נניח קיים $\lim_{x\to p} f(x)=l$. אזי לכל $l'<l$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in U_\delta^0(p)$ מתקיים $f(x)>l'$. ($l\in \bar{R}$)

הוכחה :

1. נניח $l\in R$ ונבחר $\varepsilon=l-l'>0$, $l'<l$. מתקיים $U_\varepsilon(l)=(l',2l-l')$.
   ע״פ הגדרה $\exists\delta>0\forall x\in A, x\in U_\delta^0(P): f(x)\in(l',2l-l')$ ולכן $f(x)>l'$.
2. נניח $l'<l=+\infty$, ומתקיים $\lim_{\substack{x\to p\\ x\in A}} f(x)=+\infty$ ולפי הגדרת הגבול $\exists\delta>0\forall x\in A, x\in U_\delta^0(P): f(x)>l'$.

   מ.ש.ל.

<u>משפט</u> : נניח ש$f,g:A\to R$ כך ש$\forall x\in A, x\neq p: f(x)\le g(x)$. נניח שקיימים $\lim_{x\to p} f(x)$, $\lim_{x\to p} g(x)$. אזי אי השיוויון בין הפונקציות הוא גם בין הגבולות : $l_1=\lim_{x\to p} f(x)\le \lim_{x\to p} g(x)=l_2$.

הוכחה :נניח בשלילה שמתקיים $l_2>l_1$ ולכן $l_1-l_2>0$.

מתקיים ע״פ אריתמטיקה של גבולות $l_1-l_2=\lim_{x\to p} f(x)-\lim_{x\to p} g(x)=\lim_{x\to p}[f(x)-g(x)]>0$, ולכן ע״פ הגדרת גבול הפונקציה $\exists\delta>0\forall x\in U_\delta^0(p), f(x)-g(x)>0$ בסתירה לנתון ש$f(x)\le g(x)$. לכן בהכרח ש$l_1\le l_2$.

<u>למת הסנדוויץ</u> :

<u>משפט</u> : יהיו $f,g,h:A\to R$ וגם $p\in LimA$. נניח שמתקיים $\forall x\in A, x\neq p: f(x)\le g(x)\le h(x)$. אם קיימים גבולות לשתי הצדדיים, ז״א $\lim_{x\to p} f(x)=\lim_{x\to p} h(x)=l$ אזי קיים $\lim_{x\to p} g(x)=l$.

הוכחה : ניעזר בלמת הסנדוויץ׳ לסדרות ובגבול הסדרה לפי היינה ונוכיח. לא נבצע את ההוכחה כאן מפאת קוצר זמן.

דוגמא : מהם הגבולות של הפונקציות הבאות?

1. $f(x)=\sin x$. מתקיים $0\le|\sin x|\le|x|$ ו$\lim_{x\to 0}|x|=0$ לכן ע״פ למת הסנדוויץ $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\sin x=0$.
2. $f(x)=\cos x$ מתקיים $f(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}\to_{x\to 0} 0$.
3. $f(x)=\frac{\sin x}{x}$. ע״פ הסרטוט למטה וברדיאנים מתקיים : $\frac{1}{2}\cos^2 x\le\frac{1}{2}\cos x\sin x\le\frac{1}{2}x$. מכאן ש$\cos x\le\sin x\le x$ ולכן מתקיים $\cos x\le\frac{\sin x}{x}\le 1$ וע״פ למת הסנדוויץ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.