

# תרגיל 8 – אלגברה מופשטת 1

1. ענו על הסעיפים הבאים:

1.1.1. נניח ש- $G$  היא חבורת מסדר  $p^k$  עבור  $p$  ראשוני ו- $k \geq 1$ , ו- $G$  פועלת על קבוצה עם  $n$  איברים כש- $p$  לא מחלק את  $n$ . הוכיחו שקיימת נקודת שבת.

1.1.2. הוכיחו או הפריכו: בהינתן חבורה  $G$  הפועלת על קבוצה  $X$  כך ש- $|G|=|X|=13$ , בהכרח קיימת לפעולה נקודת שבת.

2. עבור  $H \leq G$  נגדיר את ה**מנרמל** של  $H$  ב- $G$  להיות  $N_G(H) := \{g \in G : gH = Hg\}$ . כאשר ההקשר ברור, נרשום פשוט  $N(H)$ . הוכיחו:

2.1.  $N(H) \leq G$  ו- $H \triangleleft N(H) \Leftrightarrow N(H) = G$ ;

2.2.  $H \triangleleft N(H)$ ;

2.3. אם  $H \triangleleft K \leq G$  אזי  $K \leq N(H)$ .

3. נתבונן ב- $S_6$  ובקבוצה הבאה:  $H = \{\sigma \in S_6 : \sigma(2) = 2, \sigma(4) = 4, \sigma(6) = 6\}$ . הוכיחו ש- $H$  היא תת-חבורה ושהיא איזומורפית ל- $S_3$ . האם היא תת חבורה נורמלית? הוכיחו שב- $N(H)$  יש שתי תת-חבורות  $K, L$  כך ששתייהן איזומורפיות ל- $S_3$  ו- $L \cap K = \{id\}$ .

4. רשמו את שוויון המחלקות עבור החבורות  $S_4, S_5, D_4$  (כלומר, הביעו את הסדר של כל אחת מהן באמצעות סכום הגדלים של מחלקות הצמידות שלהן. שימו לב לכמות האיברים במרכז).

5. תהי  $G$  חבורה סופית מסדר אי זוגי. הוכיחו שלכל  $x \in G, x \neq 1$  אינו צמוד להופכי שלו.

6. נתון משושה משוכלל שניתן לצבוע את צלעותיו ב-5 צבעים שונים. אם מותר לסובב את המשושה ב-120 מעלות (זאת אומרת, סיבוב כזה יחשב לאותה הצביעה), כמה צביעות שונות יש?

בהצלחה! 😊