מתמטיקה בדידה (88195) – פתרון בחינת סיום (מועד א')

פרופ' רון עדין

משך הבחינה: שלוש שעות.
אין להשתמש בשום חומר עזר, כולל מחשבון.
יש לענות על כל 5 השאלות, כל אחת בעמוד נפרד. כל השאלות שוות-משקל.
ניתן לסמן עמודים שלמים כ"טיוטה".
נא להסביר ולנמק היטב את כל הפתרונות.

בהצלחה !

<u>שימו לב</u>: הפתרונות מובאים בקיצור נמרץ.

1. הוכיחו: כל שתי עוצמות ניתנות להשוואה. ציינו בבירור על מה אתם מסתמכים.
תהיינה X, Y קבוצות. צריך להוכיח שקיימת פונקציה חח"ע $f:X\to Y$ או שקיימת פונקציה חח"ע $g:Y\to X$. תהי P קבוצת כל הזוגות (A,f) כאשר $A\subseteq X$ קבוצה ו- $f:A\to Y$ פונקציה חח"ע. P אינה ריקה (כי $(A,f)\in P$ עבור $A=\varnothing$ והפונקציה הריקה $f:\varnothing\to Y$), והיא גם סדורה חלקית ע"י היחס $(A_1,f_1)\le(A_2,f_2)\Leftrightarrow(A_1\subseteq A_2)\wedge(f_2|_{A_1}=f_1)$. לכל שרשרת C ב- P נגדיר קבוצה $\bar{A}=\bigcup_{(A,f)\in C}A$ ופונקציה $\bar{f}:\bar{A}\to Y$ ע"י: $\bar{f}(x)=f(x)$ בתנאי ש- $(A,f)\in C$ וגם $x\in A$. $\bar{f}$ מוגדרת היטב וחח"ע, מכיוון ש- C שרשרת. לכן $(\bar{A},\bar{f})\in P$ הוא חסם מלעיל ל- C. הוכחנו שלכל שרשרת ב- P יש חסם מלעיל. לפי הלמה של צורן, יש ב- P איבר מקסימלי, נאמר (A_0,f_0). $f_0:A_0\to Y$ היא חח"ע. אם $A_0=X$ אז סיימנו; לכן נניח שיש $x_1\in X\setminus A_0$. אם f_0 היא על אז סיימנו, כי אז Y שוות עוצמה לתת-קבוצה A_0 של X. לכן נניח ש- f_0 לא על, כלומר קיימת $y_1\in Y$ שאין לה מקור ע"י f_0. נגדיר $A_1:=A_0\cup\{x_1\}$ ופונקציה $f_1:A_1\to Y$ ע"י: $f_1(x):=f_0(x)$ לכל $x\in A_0$, $f_1(x_1)\div y$. אזי $(A_1,f_1)\in P$ וגם $(A_0,f_0)<(A_1,f_1)$, בניגוד להנחה ש- (A_0,f_0) מקסימלי ב- P.

2. תהי A קבוצה, ונגדיר $B:=A\cup\{b_0\}$ כאשר $b_0\notin A$. יהי R יחס על A, ונגדיר $S:=R\cup\{(b_0,b_0)\}$ (יחס על B). הוכיחו או הפריכו:
   א. אם R יחס שקילות (על A) אז S יחס שקילות (על B).
   נכון (רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי).
   ב. אם R יחס סדר חלקי (על A) אז S יחס סדר חלקי (על B).
   נכון (רפלקסיבי, אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי).
   ג. אם R פונקציה (מ- A ל- A) אז S פונקציה (מ- B ל- B).
   נכון (לכל $b\in B$ יש $\tilde{b}\in B$ יחיד כך ש- $(b,\tilde{b})\in S$).

3. <u>סדרה בינארית</u> היא סדרה (אינסופית) של 0-ים ו-1-ים; פורמלית, זוהי פונקציה $f:\mathbb{N}\to\{0,1\}$. הוכיחו או הפריכו:

א. תהי A קבוצת כל הסדרות הבינאריות שאינן מכילות את הרצף 01. אזי $|A|=\aleph_0$.

נכון. אלו הן הסדרות שבהן אם מופיע 0 אז אחריו יהיו רק 0-ים, כלומר: או שכל הסדרה 1-ים, או שיש מספר סופי (אולי אפס) של 1-ים ואחריהם רק 0-ים. הסדרה נקבעת ע"י מספר ה-1-ים, ולכן $|A|=\aleph_0$.

ב. תהי B קבוצת כל הסדרות הבינאריות שאינן מכילות את הרצף 00. אזי $|B|=\aleph_0$.

לא נכון. אלו הן הסדרות המורכבות מ-0-ים בודדים, שביניהם רצפים (באורך כלשהו) של 1-ים. אפילו אם כל רצפי ה-1-ים הם באורך 1 או 2, מספר האפשרויות הוא $2^{\aleph_0}$, שהוא גדול מ-$\aleph_0$.

ג. תהי C קבוצת כל הסדרות הבינאריות שאינן מכילות את הרצפים 00, 11. אזי $|C|=\aleph_0$.

לא נכון. אלו סדרות המורכבות מ-0 ו-1 לסירוגין, ויש רק שתי סדרות כאלו.

4. חברה מסחרית החליטה לחלק לסטודנטים חולצות בחינם.

א. נניח שיוצרו 80 חולצות זהות. מה מספר הדרכים לחלק אותן בין 100 סטודנטים, אם כל סטודנט מקבל חולצה אחת לכל היותר?

בדיוק 80 סטודנטים יקבלו חולצות, כל אחד חולצה אחת. מספר האפשרויות הוא $\binom{100}{80}$.

ב. נניח שיוצרו 100 חולצות זהות. מה מספר הדרכים לחלק אותן בין 100 סטודנטים, אם אין הגבלה על מספר החולצות שכל סטודנט מקבל?

זו בעיה של חלוקת 100 כדורים זהים ל- 100 תאים מסומנים, כלומר צירופים עם חזרות של 100 מתוך 100. התשובה היא $\binom{199}{100}$.

ג. נניח שיוצרו 120 חולצות זהות. מה מספר הדרכים לחלק אותן בין 100 סטודנטים, אם כל סטודנט מקבל לפחות חולצה אחת?

תחילה ניתן חולצה אחת לכל סטודנט. תישארנה 20 חולצות זהות, לחלוקה ל-100 סטודנטים ללא הגבלות נוספות. מדובר במספר הצירופים עם חזרות של 20 מתוך 100, והתשובה היא $\binom{119}{20}$.

5.

א. הוכיחו שאפשר לקבל כל טבלת אמת (בכל מספר משתנים) ע"י שימוש בקשרים $\neg, \vee, \wedge$ בלבד.

לכל שורה בטבלת אמת אפשר לבנות פסוקית עם $\neg, \wedge$ בלבד, המקבלת ערך T בדיוק עבור השורה הזו. ביצוע $\vee$ בין הפסוקיות המתאימות לשורות שבהן ערך הטבלה T יתן צורת DNF עם טבלת האמת הנתונה.

ב. הוכיחו שאפשר לעשות זאת גם ע"י שימוש בקשרים $\neg, \vee$ בלבד.

זה נובע מסעיף א', כי אפשר להביע את הקשר $\wedge$ בעזרת שני האחרים: $p \wedge q \equiv \neg((\neg p) \vee (\neg q))$.

ג. רשמו את טבלת האמת של $\leftrightarrow$, וקבלוה ע"י שימוש בקשרים $\neg, \vee$ בלבד.

למשל $p \leftrightarrow q \equiv (\neg(p \vee q)) \vee (\neg(\neg p \vee \neg q))$.