פתרון שאלה 1

א. לפי היינה כדי להראות ש- $\lim_{x\to 1} g(x)=1$ צריך להראות שלכל סדרה $1\neq x_n \to 1$ מתקיים $g(x_n)\to 1$. תהי $1\neq x_n\to 1$.

אם החל ממקום מסוים x_n אירציונלי אז החל ממקום מסוים $g(x_n)=(x_n)^2$ ואז $g(x_n)\to 1^2=1$.
באותו האופן אם החל ממקום מסוים x_n רציונלי אז החל ממקום מסוים $g(x_n)=2x_n-1$ ואז $g(x_n)\to 2\cdot 1-1=1$.

אם שני המקרים האלה לא מתקיימים אז יש אינסוף אינדקסים בהם x_n רציונלי ואינסוף אינדקסים בהם x_n אירציונלי. נסתכל על תתי-הסדרות x_{n_k}, x_{m_k} עבורן $x_{n_k}\in\mathbb{Q}$ לכל k, $x_{m_k}\notin\mathbb{Q}$ לכל k. אז לפי משפט שהוכחנו בש"ב קודמים, הגבולות החלקיים היחידים של x_n הם הגבולות של x_{n_k}, x_{m_k} (כי כל מספר ממשי הוא או רציונלי או אירציונלי), וגבולות אלה הם שניהם 1 (לפי אותו החישוב כמו לעיל). כלומר ל-x_n יש גבול חלקי יחיד והוא 1, ולכן לפי משפט, $x_n\to 1$.

ב. יהי $\epsilon>0$. נבחר $\delta=\min\left(1,\frac{\epsilon}{3},\frac{\epsilon}{2}\right)=\min(1,\frac{\epsilon}{3})$. יהי x המקיים $0<|x-1|<\delta$. יש שתי אפשרויות. אפשרות 1: $x\in\mathbb{Q}$. ואז

$$|f(x)-L|=|2x-1-1|=2|x-1|<2\delta<\frac{2\epsilon}{2}=\epsilon$$

אפשרות 2: $x\notin\mathbb{Q}$ ואז

$$|f(x)-L|=|x^2-1|=|x-1|\cdot|x+1|\le 3|x-1|<3\delta<\frac{3\epsilon}{3}<\epsilon$$

באשר המעבר $|x+1|\le 3$ נכון כי $\delta\le 1$ ולכן $|x-1|<1$ ולכן לפי א"ש המשולש $|x+1|=|x-1+2|\le|x-1|+2=1+2=3$.

פתרון שאלה 2

א. נסמן ב-I את ההגדרה הרגילה וב-II את ההגדרה שנתונה בסעיף זה. הכיוון I גורר II ברור כי אם $|f(x)-L|<\epsilon$ אז בפרט $|f(x)-L|\le\epsilon$. עבור הכיוון II גורר I, תהי $f(x)$ פונקציה המקיימת את II ונראה שהיא מקיימת את I. יהי $\epsilon>0$. מהנתון קיים $\delta>0$ כך שלכל x המקיים $0<|x-a|<\delta$ מתקיים $|f(x)-L|\le\frac{\epsilon}{2}<\epsilon$ כדרוש.

ב. נסמן ב-I את ההגדרה הרגילה וב-II את ההגדרה שנתונה בסעיף זה. הכיוון II גורר I ברור כי אם דבר כלשהו מתקיים לכל x המקיים $0<|x-a|\le\delta$ אז ודאי הוא מתקיים גם עבור כל x המקיים $0<|x-a|<\delta$. עבור הכיוון I גורר II, תהי $f(x)$ פונקציה המקיימת את I ונראה שהיא מקיימת את II. יהי $\epsilon>0$. מהנתון קיים $\delta'>0$ כך שלכל x המקיים $0<|x-a|<\delta'$ מתקיים $|f(x)-L|<\epsilon$. נבחר $\delta=\frac{\delta'}{2}$. ואז לכל x המקיים $0<|x-a|\le\delta$ מתקיים $0<|x-a|\le\frac{\delta'}{2}$ ובפרט $0<|x-a|<\delta'$ ולכן $|f(x)-L|<\epsilon$ כדרוש.

ג. כדי לקיים את ההגדרה עם "לכל $\epsilon \geq 0$" צריך להתקיים בפרט עבור $\epsilon = 0$ כי קיים $\delta > 0$ כך שלכל x המקיים $0 < |x-a| < \delta$ מתקיים $|f(x) - L| < 0$ אך צד שמאל אי-שלילי, לכן זה לא יכול להתקיים לעולם. כלומר אף פונקציה לא תקיים את הגדרת ההתכנסות שמופיעה בסעיף זה, ומצד שני ראינו שיש פונקציות שמקיימות את הגדרת ההתכנסות הרגילה, למשל הפונקציה משאלה 1 סעיף א'.

ד. כאשר משתמשים בהגדרה שמופיעה בסעיף זה, עבור כל פונקציה, וכל נקודה a, וכל $\epsilon > 0$, ניתן לבחור את $\delta = 0$, ואז אם $0 < |x-a| < 0$ אז כל דבר מתקיים, כי אין אף x שמקיים תנאי זה (ערך מוחלט הוא תמיד אי-שלילי ולכן לא יכול להיות קטן מ-0), בפרט $|f(x) - L| < \epsilon$. כלומר לפי ההגדרה בסעיף זה מקבלים כי לכל פונקציה כל המספרים הממשיים הם גבולות שלה בכל אחת מהנקודות, מה שכמובן סותר את יחידות הגבול עבור הגדרת הגבול הרגילה.

ה. למשל לפונקציה $f(x) = \frac{x}{x}$ יש גבול לפי ההגדרה הרגילה בנקודה $x = 0$, כי לכל $x \neq 0$ מתקיים $f(x) = 1$ ולכל $\epsilon > 0$ נוכל לבחור δ כלשהו (למשל $\delta = 73$) ואז לכל x המקיים $0 < |x-0| < \delta$ מתקיים בפרט $x \neq 0$ ולכן $|f(x) - L| = |1-1| = 0 < \epsilon$. מצד שני לפונקציה זו אין גבול לפי ההגדרה החלופית שמופיעה בסעיף זה, כי כדי שיהיה לה גבול לפי הגדרה זו צריך להתקיים כי לכל x המקיים $|x - 0| < \delta$ ובפרט עבור $x = 0$ יתקיים $|f(x) - L| < \epsilon$ אך $f(0)$ איננו מוגדר.

<u>פתרון שאלה 3</u>

א. יהי $\epsilon > 0$. נבחר $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. ואז לכל x המקיים $0 < |x-3| < \delta$ מתקיים
$|2x - 17 - (-11)| = |2x - 6| = 2|x-3| < 2\delta = 2\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ כדרוש.

ב. יהי $\epsilon > 0$. נבחר $\delta = \min(\frac{\epsilon}{8}, 1)$. ואז לכל x המקיים $0 < |x+4| < \delta$ מתקיים בפרט $|x+4| < 1$ כלומר $-1 < x+4 < 1$ כלומר $1 < x+6 < 3$ כלומר $|x+6| > 1$. לכן מתקיים $\left|\frac{x-10}{x+6} + 7\right| = 8\frac{|x+4|}{|x+6|} < 8|x+4| < 8\frac{\epsilon}{8} = \epsilon$ כדרוש.

ג. ניעזר להלן בנוסחה $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ לקבלת $x^3 - 125 = (x-5)(x^2 + 5x + 25)$.

יהי $\epsilon > 0$. נבחר $\delta = \min\left(\frac{\epsilon}{91}, 1\right)$. ואז לכל x המקיים $0 < |x-5| < \delta$ מתקיים בפרט $|x-5| < 1$ כלומר $-1 < x-5 < 1$ כלומר $4 < x < 6$ כלומר $|x| < 6$. לכן מתקיים
$|x^3 - 125| = |x-5| \cdot |x^2 + 5x + 25| \leq |x-5|(|x|^2 + 5|x| + 25) <$
$\frac{\epsilon}{91}(36 + 30 + 25) = \epsilon$, כדרוש.

<u>פתרון שאלה 4</u>

א. לכל M קיים $\delta > 0$ כך שלכל x המקיים $0 < |x-a| < \delta$ מתקיים $f(x) < M$

ב. לכל $\epsilon > 0$ קיים A כך שלכל $x > A$ מתקיים $|f(x) - L| < \epsilon$

ג. לכל $\epsilon > 0$ קיים A כך שלכל $x < A$ מתקיים $|f(x) - L| < \epsilon$

ד. לכל M קיים A כך שלכל $x > A$ מתקיים $f(x) > M$

ה. לכל M קיים A כך שלכל $x > A$ מתקיים $f(x) < M$

ו. לכל M קיים A כך שלכל $x < A$ מתקיים $f(x) > M$

ז. לכל M קיים A כך שלכל $x < A$ מתקיים $f(x) < M$

<u>פתרון שאלה 5</u>

א. יהי $M > 0$. נבחר $A = M^2$ ואז לכל $x > A$ מתקיים $x > M^2$ כלומר $\sqrt{x} > M$ כדרוש.

ב. יהי $M > 0$. נבחר $A = \frac{e^M+6}{2}$ ואז לכל $x > A$ מתקיים $x > \frac{e^M+6}{2}$ כלומר $2x - 6 > e^M$ כלומר $\log(2x-6) > M$ כדרוש.

ג. נראה כי לא קיים הגבול $\lim_{x\to\infty} \sin(x)$ (גם לא במובן הרחב).

ראשית, ברור כי לא מתקיים $\lim_{x\to\infty} \sin(x) = \infty$ בגלל ש-$sinx \leq 1$ לכל x (ולכן בפרט לא ייתכן כי קיים מיקום החל ממנו $sinx > 2$), וברור כי לא מתקיים $\lim_{x\to\infty} \sin(x) = -\infty$ בגלל ש-$sinx \geq -1$ לכל x (ולכן בפרט לא ייתכן כי קיים מיקום החל ממנו $sinx < -70$). נשאר להראות כי לא מתקיים $\lim_{x\to\infty} \sin(x) = L$ באשר L מס' ממשי.

נניח בשלילה כי $\lim_{x\to\infty} \sin(x) = L$. כלומר לכל $\epsilon > 0$ יש A כך שלכל $x > A$ מתקיים

$$|\sin(x) - L| < \epsilon$$

נראה כי דבר זה איננו מתקיים עבור $\epsilon = 1$ ע"י כך שלכל A נצביע על $x > A$ שלא מקיים

$$|\sin(x) - L| < 1$$

יש שני מקרים: $L \geq 0$, $L < 0$. במקרה שבו $L \geq 0$, נוכל לבחור $x > A$ מהצורה $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$ עבור $n \in N$ מספיק גדול ואז יתקיים

$$|\sin(x) - L| = \left|\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right) - L\right| = \left|\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - L\right| = |-1 - L| = 1 + L > 1$$

במקרה שבו $L < 0$, נוכל לבחור $x > A$ מהצורה $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ עבור $n \in N$ מספיק גדול, ואז יתקיים

$$|\sin(x) - L| = \left|\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) - L\right| = \left|\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - L\right| = |1 - L| = 1 - L > 1$$

כלומר הגענו לסתירה בשני המקרים, מש"ל.

(ההוכחה כי לא קיים הגבול במינוס אינסוף דומה מאוד, ההבדל היחיד שבוחרים $x < A$ במקום $x > A$, אז נגדיר את x ע"י למשל $x = \frac{3\pi}{2} - 2\pi n$ עבור n מספיק גדול, ושאר ההוכחה אותו דבר.)

ד. יהי $\epsilon > 0$. נבחר $A = \min(-10, \frac{-7}{2\epsilon})$. אז עבור $x < A$ מתקיים בפרט $x < -10$ ולכן $|x| = -x < -2x - 3 = |2x+3|$ כלומר $\frac{1}{|x|} < \frac{1}{|2x+3|}$. כמו כן מתקיים $x < \frac{-7}{2\epsilon}$ כלומר $\frac{1}{x} > \frac{-2\epsilon}{7}$ ולכן

$$\left|\frac{x+5}{2x+3} - \frac{1}{2}\right| = \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{|2x+3|} < \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{|x|} = \frac{-7}{2x} > \frac{-7}{2} \cdot \frac{-2\epsilon}{7} = \epsilon$$

ה. יהי $M > 0$. נבחר $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$. ואז לכל x המקיים $|x-1| < \frac{1}{\sqrt{M}}$ מתקיים

$$\left|\frac{x^2+1}{(x-1)^2}\right| > \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{|x-1|^2} > \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)^2} = M$$

כדרוש.

<u>פתרון שאלה 6</u>

א. למשל $f(x) = \sin(2\pi x)$, או דוגמא נוספת $f(x) = \begin{cases} 8, & x \in N \\ 7, & x \notin N \end{cases}$.

ב. לא ייתכן. כי אם גבול הפונקציה $\lim_{x\to\infty} f(x)$ קיים אז לפי היינה לכל סדרה $x_n \to \infty$ קיים גבול הסדרה $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ ובפרט עבור $x_n = n \to \infty$ נקבל כי $\lim_{n\to\infty} f(n)$ קיים.

<u>פתרון שאלה 7</u>

ראשית נראה כי לא קיים הגבול בנקודות השלמות. תהי $a \in Z$.

נסתכל על הסדרות $x_n = a + \frac{1}{n}$, $y_n = a - \frac{1}{n}$. אז $a \neq x_n \to a$ וגם $a \neq y_n \to a$, אבל עבור $n \geq 2$

$$f(x_n) = \left\lfloor a + \frac{1}{n} \right\rfloor = a$$

$$f(y_n) = \left\lfloor a - \frac{1}{n} \right\rfloor = a - 1$$

ולכן $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$, $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = a - 1$, והראנו לפי היינה שבכל נקודה שלמה הגבול לא קיים.

כעת נראה שב-$a \notin Z$ הגבול כן קיים. יהי $\epsilon > 0$. נבחר $\delta = \min(a - \lfloor a \rfloor, \lceil a \rceil - a)$ (אינטואיטיבית, "המרחק מקצה המדרגה", כדי שנשאר באותה המדרגה). אז לכל x שמקיים $|x - a| < \delta$ מתקיים בפרט $|x - a| < a - \lfloor a \rfloor$ ולכן בפרט $x - a > \lfloor a \rfloor - a$ כלומר $x > \lfloor a \rfloor$, וכן מתקיים בפרט $|x - a| < \lceil a \rceil - a$ ולכן בפרט $x - a < \lceil a \rceil - a$ כלומר $x < \lceil a \rceil$.

כלומר לכל x שמקיים $|x - a| < \delta$ מתקיים $\lfloor a \rfloor < x < \lceil a \rceil$ לכן ודאי $\lfloor x \rfloor = \lfloor a \rfloor$. ולכן מתקיים

$\epsilon > 0 = |0| = |\lfloor x \rfloor - \lfloor a \rfloor| = |f(x) - L|$ כדרוש.