אינפי 4 תרגול 8

19 במאי 2015

משפט הדיברגנץ:

יהי $F(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z).R(x.y.z))$, **הדיברגנץ** של F הוא:

$$divF=\nabla\cdot F=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})\cdot F=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

יהי G גוף תלת ממדי במרחב $\mathbb{R}^3$ ששפתו היא משטח (סגור וחלק למקוטעין) עם נורמל חיצוני. יהי:

$$F(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z).R(x.y.z))$$

שדה וקטורי כך שהפונקציות P,Q,R גזירות ברציפות לפי כל אחד מהמשתנים $x.y.z$.

אזי:

$$\iint\limits_S F\cdot\vec{n}dS=\iiint\limits_G divFdxdydz$$

משפט הדיברגנץ מאפשר לנו לעבור מאינטגרלים משטחיים מסוג שני לאינטגרלים משולשים ולהיפך.

נזכור שאינטגרלים משטחיים אנו יודעים לחשב בעזרת אינטגרלים כפולים (בתרגול הקודם) ולכן במקרים מסויימים יש לנו החופש לבחור באיזו דרך לחשב את האינטגרל, מה שיכול לחסוך הרבה עבודה.

יתרה מזאת, בהינתן גוף תלת ממדי G, אנחנו יכולים לחשב את נפחו בעזרת:

$$\iiint\limits_G dxdydz$$

ולכן עבור שדה וקטורי מתאים, כזה שמקיים $divF = 1$ נוכל להשתמש במשפט הדיברגנץ ולחשב נפח של גוף בעזרת אינטגרל משטחי:

$$\iiint\limits_G dxdydz = \iint\limits_S F \cdot \vec{n} dS$$

הדבר מזכיר שימוש במשפט גרין כדי לחשב שטח של תחום (אינטגרל כפול) בעזרת אינטגרל מסילתי.

אם כן, שדה וקטורי מתאים הוא למשל $F(x, y, z) = \frac{1}{3}(x, y, z)$ ולכן אם נרצה לחשב את נפחו של גוף G, נוכל לחשב את האינטגרל:

$$\iint\limits_S F \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{3} \iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy$$

כאשר המשטח S הוא שפת התחום G.

<u>תרגיל:</u>

חשבו את האינטגרלים $\iint_S F \cdot \vec{n} dS$ במקרים הבאים.

א. $F(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$ והמשטח S הוא הספירה $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

<u>פתרון:</u>

אם ננסה לחשב את האינטגרל בעזרת פרמטריזציה, פרמטריזציה של המשטח היא:

$$\phi(\psi, \theta) = (a \cos \psi \sin \theta, a \sin \psi \sin \theta, a \cos \theta)$$

ומתקיים:

$$\phi_\psi \times \phi_\theta = (-a^2 \cos \psi \sin^2 \theta, -a^2 \sin \psi \sin^2 \theta, -a^2 \sin \theta \cos \theta)$$

ונצטרך לחשב את האינטגרל:

$$\iint F(\phi(\psi,\theta))\cdot(\phi_\psi\times\phi_\theta)d\psi d\theta$$

שזה אפשרי אבל למה.

נשתמש במשפט הדיברגנץ:

$$divF=(3x^2+3y^2+3z^2)$$

ולכן:

$$\iint\limits_S F\cdot\vec{n}dS=\iiint\limits_G(3x^2+3y^2+3z^2)dxdydz$$

כאשר G הוא הספירה. נעבור לקואורדינטות כדוריות:

$$x=r\sin\theta\cos\psi, y=r\sin\theta\sin\psi, z=r\cos\theta$$

כאשר: $(r,\theta,\psi)\in[0,a]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$. היעקוביאן הוא $r^2\sin\theta$ ולכן:

$$\iiint\limits_G(3x^2+3y^2+3z^2)dxdydz=3\cdot\iiint\limits_G r^2(\sin^2\theta\cos^2\psi+\sin^2\theta\sin^2\psi+\cos^2\theta)r^2\sin\theta drd\theta d\psi$$

$$=3\cdot\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{1}r^4\sin\theta=3\cdot2\pi\cdot(-\cos\theta)_0^\pi\cdot\frac{r^5}{5}|_0^a=\frac{12\pi a^5}{5}$$

וזהו האינטגרל.

ב. $F(x,y,z)=(x,y,z)$ והמשטח S הוא שפתו של הגליל $x^2+y^2=a$ ($a>0$) הכלוא בין המישורים $z=1,z=-1$.

פתרון:

אם נחשב את האינטגרל בעזרת פרמטריזציה, נצטרך לחלק אותו לשלושה תחומים (המעגלים התחתון והעליון והמעטפת).

נשתמש, אם כן, במשפט הדיברגנץ:

$$divF = 1 + 1 + 1 = 3$$

ולכן:

$$\iint\limits_S F \cdot \vec{n} dS = \iiint\limits_G 3dxdydz = 3 \cdot \iiint\limits_G dxdydz$$

והאינטגרל המשולש שקיבלנו שווה, כידוע, לנפחו של הגוף.

נפח גליל שווה לשטח הבסיס כפול הגובה. אורך הגובה הוא 2 (מהמישור $z = 1$ עד למישור $z = -1$).

הבסיס הוא מעגל עם רדיוס $\sqrt{a}$ ולכן שטחו πa. לכן:

$$\iiint\limits_G dxdydz = 2 \cdot \pi a$$

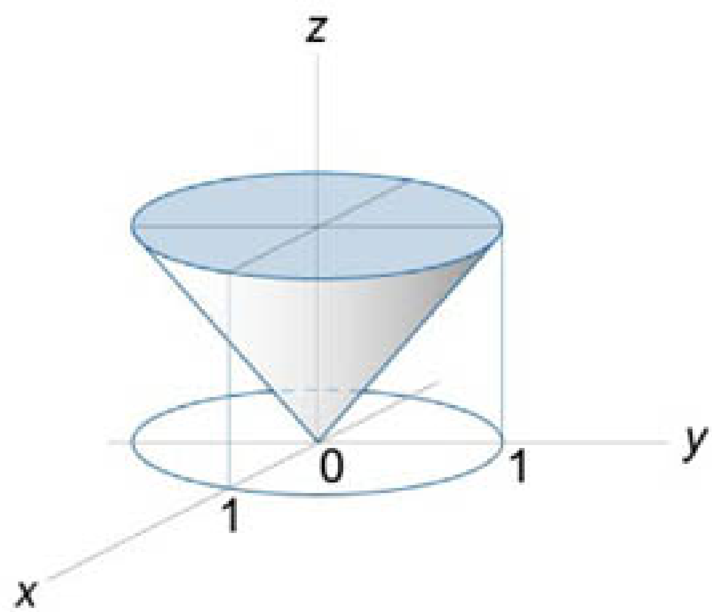
ובסה"כ האינטגרל שלנו יהיה:

$$\iint\limits_S F \cdot \vec{n} dS = 6\pi a$$

ג. $F(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$ והמשטח S הוא שפת החרוט $x^2 + y^2 - z = 0$ החסום ע"י המישור $z = 1$.

<u>פתרון:</u>

הגוף שלנו הוא:



בתרגול פתרנו שאלה מעט שונה. אותו כוח בתכלס.

לפי משפט הדיברגנץ:

$$\iint\limits_S F\cdot\vec{n}dS=\iiint\limits_G(3x^2+3y^2+3z^2)dxdydz=$$

נעבור לקואורדינטות גליליות, כי רק x,y משחקים את המשחק של המעגל:

$$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=z$$

כאשר $0\le\theta\le2\pi$, $0\le r\le z$ ו־$0\le z\le1$. היעקוביאן הוא r ולכן:

$$\iiint\limits_G=3\cdot\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^z(r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta+z^2)rdrdzd\theta=6\pi\cdot\int\limits_0^1(\frac{r^4}{4}+\frac{z^2r^2}{2})_{r=0}^{r=z}=$$

$$=6\pi\cdot\int\limits_0^1\frac{3z^4}{4}dz=\frac{9\pi}{10}$$

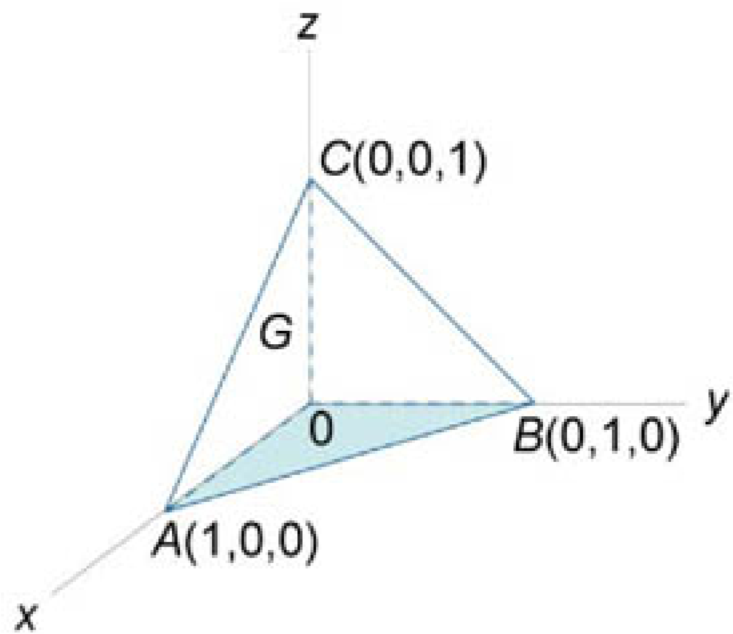
וזהו האינטגרל שלנו.

ד. $F(x,y,z)=(2xy,8xz,4yz)$ והמשטח S הוא טטראדר שקודקודיו הם הנקודות:

$$O(0,0,0),A(1,0,0),B(0,1,0),C(0,0,1)$$

<u>פתרון:</u>

הגוף שלנו הוא:



פירמידה משולשת שבסיסה הוא משולש ABC.

כעת, לפי משפט הדיברגנץ:

$$\iint\limits_S F\cdot\vec{n}dS=\iiint\limits_G(2y+0+4y)dxdydz=6\cdot\iiint\limits_G ydxdydz$$

הקו הישר AB הוא מהצורה $y=1-x$.

המישור ABC הוא מהצורה $x+y+z=1$ או $z=1-x-y$.

כדאי להיזכר בחומר מהתיכון (שאלון 807 או שאלון 007 לווטרנים) ולהבין איך הגענו למשוואות האלו (רמז: לא מסובך).

לכן, תחומי האינטגרל שלנו יהיו:

$$0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x, 0 \le z \le 1-x-y$$

והאינטגרל יהיה:

$$6 \cdot \iiint\limits_G y dx dy dz = 6 \cdot \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} \int\limits_0^{1-x-y} y dz dy dx = 6 \cdot \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} y(1-x-y) dy dx =$$

$$= 6 \cdot \int\limits_0^1 ((1-x)\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3})|_0^{1-x} dx = 6 \cdot \int\limits_0^1 \frac{(1-x)^3}{2} - \frac{(1-x)^3}{3} dx = -\frac{(1-x)^4}{4}|_0^1 = \frac{1}{4}$$

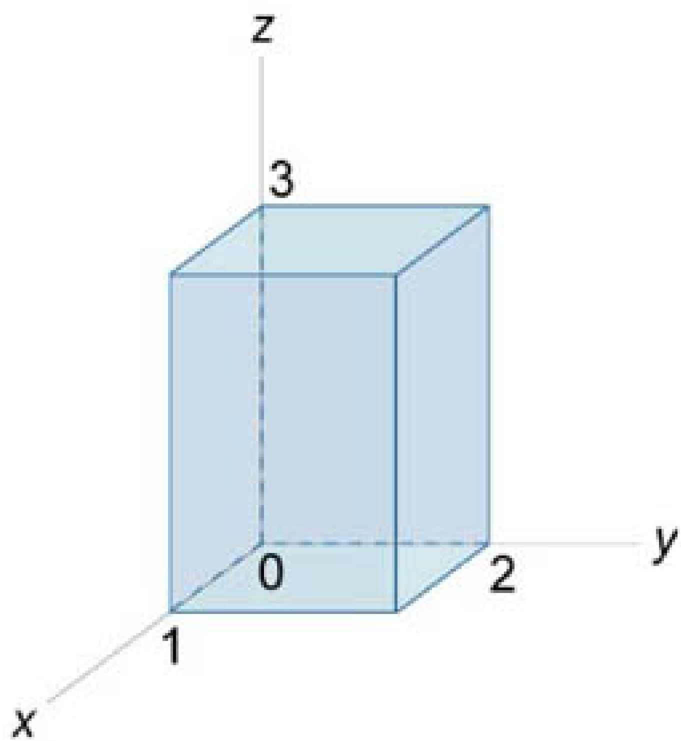
וזהו האינטגרל שלנו.

ה. $F(x,y,z) = (2x^2y, xz^2, 4yz)$ והמשטח S הוא שפת התיבה החסומה ע"י המישורים:

$$x=0, x=1, y=0, y=2, z=0, z=3$$

<u>פתרון:</u>

הגוף שלנו הוא:



לפי משפט הדיברגנץ:

$$\iint\limits_S F\cdot\vec{n}dS=\iiint\limits_G(4xy+0+4y)dxdydz=4\iiint\limits_G(x+1)ydxdydz$$

התחום שלנו הוא: $0\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq 2$, $0\leq z\leq 3$ ולכן:

$$4\iiint\limits_G(x+1)ydxdydz=4\cdot\int\limits_0^1\int\limits_0^2\int\limits_0^3(x+1)ydzdydx=12\cdot\int\limits_0^1\int\limits_0^2(x+1)ydydx=$$

$$=12\cdot\int\limits_0^1(\frac{(x+1)y^2}{2})|_0^2dx=24\cdot(x+\frac{x^2}{2})|_0^1=36$$

וזהו האינטגרל שלנו.