הרצאה 23

נכתב על ידי נועם יערי

משפט הערך הממוצע (לגרנז')

תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b).

יש $a<c<b$ כך ש - $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

הוכחה

נחסר מ $-f$ את משוואת הישר מ - $(a,f(a))$ ל - $(b,f(b))$:

שיפוע: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

ישר: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{y-f(a)}{x-a}$

$y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$.

נגדיר: $\tilde{f}(x)\coloneqq f(x)-y$

$\Rightarrow \tilde{f}(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a)\Rightarrow \tilde{f}(a)=\tilde{f}(b)=0$.

פולינום $-f=\tilde{f}$, לכן רציפה וגזירה היכן ש $-f$ גזירה.

ממשפט רול, יש $a<c<b$ כך ש -

$$0=\tilde{f}'(c)=f'(c)-y'=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

מהעברת אגפים נקבל את הדרוש.

■

משפט הערך הממוצע המוכלל (קושי)

אם f,g רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות ב $-(a,b)$ כך ש $-g'(x)\neq 0$ שם, אז יש $a<c<b$ כך ש $-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$

הוכחה

דומה להוכחה הקודמת, עם $g(x),g(a),g(b)$ וכו, במקום x,a,b ..

$$\tilde{f}(x)\coloneqq f(x)-\left(\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x)-g(a)\big)+f(a)\right)$$

$g(a)\neq g(b)$ כיוון שאחרת, לפי רול, היה $a<x<b$ כך ש - $g'(x)=0$ בסתירה.

$\tilde{f}(a)=\tilde{f}(b)=0$

לכן ממשפט רול יש $a<c<b$ כך ש - $0=\tilde{f}'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c)$ מהעברת אגפים נקבל את הדרוש.

■

נכתב על ידי נועם יערי

הערה

ייתכן שהפונקציה f היא גזירה ב - $\mathbb{R}$ אך f' אינה רציפה.

הגדרה

f **גזירה בקטע סגור** $[a,b]$ אם f גזירה ב - (a,b), גזירה מימין ב – a ומשמאל ב - b

משפט (דרבו)

אם f גזירה ב - $[a,b]$, אז f' מקבלת כל ערך בין $f'_+(a)$ ל - $f'_-(b)$.

הוכחה

נטפל במקרה $f'_+(a) < f'_-(b)$. שני המקים הנותרים – תרגיל.

יהי $f'_+(a) < d < f'_-(b)$ צ"ל שיש $a < x < b$ כך ש - $f'(x) = d$

–

טיוטה:

רוצים $f'(x) - d = 0 = (f(x) - d \cdot x)'$

–

נגדיר $\tilde{f}(x) := f(x) - d \cdot x$. $\tilde{f}$ גזירה ב - $[a,b]$ כי הפולינום $d \cdot x$ גזיר ב - $\mathbb{R}$.

$\Leftarrow$ $\tilde{f}$ רציפה ב - $[a,b]$ $\Leftarrow$ יש לה נקודת מינימום $_{a\le} c^{\le b}$.

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\tilde{f}(a+h) - \tilde{f}(a)}{h} = \tilde{f}'_+(a) = f'_+(a) - d <_{f'_+(a)<d} 0$$

לכן, עבור $0 < h$ קטן מספיק, $\frac{\tilde{f}(a+h)-\tilde{f}(a)}{h_{>0}} < 0$

$\Leftarrow$ $\tilde{f}(a+h) < \tilde{f}(a)$, בפרט a אינה נקודת מינימום ולכן $a \neq c$.

בדומה, $c \neq b$, לסיכום: $a < c < b$. כעת, c נקודת מינימום ב - (a,b), לכן ממשפט פרמה

$0 = \tilde{f}'(c) = f'(c) - d$.

■

תזכורת

אם $f(x) \to_{x\to a} b \neq b$ ו $g(x) \to_{x\to b} c$, אז $g\big(f(x)\big) \to_{x\to a} c$.

בדומה: "אם $\underbrace{f(x) \to_{x\to a^+} b^+}_{"f(x)\to b, f(x)>b"}$ ו - $g(x) \to_{x\to b^+} c$" $g\big(f(x)\big) \to_{x\to a^+} c$

וכן עבור גבול משמאל.

נכתב על ידי נועם יערי

משפט

תהי f רציפה בסביבה של a וגזירה בסביבה המנוקבת של a. אזי:

א. אם $f'(x) \to_{x\to a} b$, אז $f'(a) = b$.

ב. כנ"ל עבור $f'_+(a)$, $f'_-(a)$.

הוכחה

נוכיח עבור $f'_+(a)$.

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

לכל $x > a$ בסביבה הנתונה במשפט, ממשפט הערך הממוצע, קיים $c = c(x)$ כך ש -

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c) = f'\big(c(x)\big)$

$c(x) \to_{x\to a^+} a^+$.

נתון $f'(x) \to_{x\to a^+} b$ מהתזכורת, b $f'_+\big(c(x)\big) \to_{(x\to a^+)}$ $\overset{c(x) \text{ מהגדרת}}{\leftleftarrows}$ $f'_+(a)$

■

מסקנה

אם f גזירה בקטע סגור אז נקודות אי הרציפות של f' (אם יש כאלה) הן תמיד מסוג שני (אחד הגבולות החד צדדיים לא קיים).

הוכחה

אם שני הגבולות החד צדדיים קיימים, כלומר:

$$f'(a) \overset{f \text{ גזירה}}{=} f'_-(a)_{x\to a^-} \leftarrow f'(x) \to_{x\to a^+} f'_+(a) \overset{f \text{ גזירה}}{=} f'(a)$$

דוגמה

האם יש פונקציה f גזירה ב - $\mathbb{R}$ כך ש - $f'(x) = [x]$ לכל x?

לא: אחרת, היו ל - f' נקודות אי רציפות מסוג ראשון ($\neq$ סוג שני).