שאלה: $U \leq V$, כך שקיים W יחיד עבורו: $U \oplus W = V$. צ"ל: $U = V$.
<u>פתרון:</u> נניח בשלילה ש־$U \neq V$, כלומר: $U \subset V$. נניח ש: $\dim U = k, \dim V = n$. יהי: $\{v_1, \ldots, v_k\}$ בסיס של U, כל השלמה של הבסיס של U לבסיס של V תיתן לנו בסיס ל־W שמקיים: $U \oplus W = V$. כלומר, אם $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ בסיס של V, אז: $W = sp\{v_{k+1}, \ldots v_n\}$ מקיים: $U \oplus W = V$.
תמיד אפשר לעשות זאת, כלומר להשלים לבסיס של כל המרחב, ביותר מדרך אחת, ולכן יש יותר מ־W אחד שמקיים זאת, בסתירה לנתון. למשל, אם $\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ היא השלמה אחת לבסיס, גם: $\{v_1 + v_{k+1}, \ldots, v_1 + v_n\}$.

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ שמקיימת: $\ker T = span\{u\}, ImT = sp\{v, w\}$. נשלים את u לבסיס של $\mathbb{R}^3$: $\{u, u', u''\}$. לפי משפט ההגדרה, קיימת T כך ש:

$$T(u) = 0, T(u') = v, T(u'') = w$$

$T^2 = I$, צ"ל: $\ker(I - T) = Im(I + T)$.
לצד אחד, יהי $v \in Im(I + T)$, צ"ל: $v \in \ker(I - T)$. כלומר, קיים u כך ש: $(I + T)(u) = v$, צ"ל: $(I - T)(v) = 0$.
נשים לב: $(I - T)(I + T) = I^2 + IT - TI - T^2 = 0$, ולכן: $(I - T)(v) = (I - T)((I + T)(u)) = 0$, כנדרש.
לצד שני, $v \in \ker(I - T)$, צ"ל: $v \in Im(I + T)$. כלומר, נתון ש: $(I - T)(v) = 0$, צ"ל שקיים u כך ש: $(I + T)(u) = v$.
אם כן, $(I - T)(v) = 0$, כלומר: $I(v) = T(v)$ ולכן: $v = T(v)$. אנחנו מחפשים u עבורו: $u + T(u) = v$. נתבונן ב־$u = \frac{1}{2}v$:

$$u + T(u) = \frac{1}{2}v + T\left(\frac{1}{2}v\right) = \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}T(v) = \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}v = v$$

כנדרש.
באופן דומה, אפשר להראות ש: $\ker(I + T) = Im(I - T)$.
כעת, צ"ל: $V = \ker(I + T) \oplus \ker(I - T)$. ראשית, לפי משפט הדרגה:

$$\dim V = \dim\ker(I + T) + \dim Im(I + T)$$

$$\dim V = \dim \ker (I-T) + \dim Im (I-T)$$

על סמך מה שכבר הוכחנו, נקבל:

$$\dim V = \dim \ker (I-T) + \dim \ker (I+T)$$

מצד אחד. מצד שני, לפי משפט המימדים:

$$\dim (\ker (I-T) + \ker (I+T)) =$$

$$\dim \ker (I-T) + \dim \ker (I+T) - \dim (\ker (I+T) \cap \ker (I-T))$$

אנחנו רוצים להראות שהחיתוך הוא $\{0\}$, ולשם כך מספיק להראות שהמימד שלו הוא 0; לא נראה שאפשר להסיק זאת ישירות ממשפט המימדים. נראה ישירות שהחיתוך הוא 0 . לפי מה שכבר הוכחנו, אפשר להחליף את הגרעינים בתמונות, למשל להוכיח ש:

$$\ker (I+T) \cap Im (I+T) = \{0\}$$

אם כן, יהי $v \in \ker (I+T) \cap \ker (I-T)$. לכן, $v \in \ker (I+T), \ker (I-T)$ ולכן: $(I+T)(v) = 0, (I-T)(v) = 0$, כלומר:

$$v + T(v) = 0, v - T(v) = 0 \Longrightarrow v = -T(v), v = T(v) \Longrightarrow v = 0$$

כנדרש. לכן, נקבל:

$$\dim (\ker (I-T) + \ker (I+T)) = \dim \ker (I-T) + \dim \ker (I+T) = \dim V$$

ולכן:

$$V = \ker (I-T) + \ker (I+T) = \ker (I-T) \oplus \ker (I+T)$$