תרגיל: יהיו $U \subseteq V$ ממ"פ ותמ"ר שלו בהתאמה. ידוע כי קיים $v \in V$ כך ש $v \notin U$. הוכיחו כי קיים $x \in V$ כך ש $x \perp U$ וגם $x \not\perp v$.

פתרון: נגדיר בסיס ל U , נרחיב אותו לבסיס של V (כך ש k הוקטורים הראשונים בבסיס הם הבסיס של U) , נפעיל על בסיס זה את תהליך גרהם שמידט ונקבל בא"נ $B = \{w_1, ..., w_k, w_{k+1}, ..., w_n\}$ כך ש $Sp\{w_1, ..., w_k\} = U$.

כעת, מכיוון ש B בסיסי של V : $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i$ כאשר $\alpha_i = \langle v, v_i \rangle$.

אם יתקיים $\alpha_i = 0$ לכל $k < i \le n$ נקבל $v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i w_i$ ומכך נסיק ש $v \in Sp\{w_1, ..., w_k\} = U$ בסתירה לנתון.

אם כך, קיים $k < i \le n$ כך ש $\alpha_i \ne 0$, נניח בה"כ ש $i = n$.

נגדיר $x = w_n$ ונוכיח ש $x \perp U$ וגם $x \not\perp v$:

ראשית, $x \perp \{w_1, ..., w_k\}$ שכן אלו וקטורים שונים בבא"נ, מכך נובע בקלות ש $x \perp Sp\{w_1, ..., w_k\}$ (הוכיחו!) ולכן $x \perp U$.

שנית, $\langle v, x \rangle = \langle v, w_n \rangle = \alpha_n \ne 0$ ולכן $x \not\perp v$.

מ.ש.ל