<u>משפט:</u> תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. אזי $p_A(x)\,\big|\,(m_A(x))^n$.

ה. (הוכחה דומה להוכחה שראינו למשפט קיילי-המילטון.)

נכתוב $m_A(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\dots+\alpha_{k-1}x^{k-1}+x^k$.

נחפש מטריצות $B_i\in\mathbb{F}^{n\times n}$ כך שמתקיים

$$(xI-A)(B_0+xB_1+x^2B_2+\dots+x^{k-1}B_{k-1})=m_A(x)\cdot I$$

כלומר:

$$-AB_0+x(B_0-AB_1)+x^2(B_1-AB_2)+\dots+x^{k-2}(B_{k-3}-AB_{k-2})+x^{k-1}(B_{k-2}-AB_{k-1})+x^kB_{k-1}\overset{\text{דרוש}}{=}$$
$$=\alpha_0I+x\alpha_1I+x^2\alpha_2I+\dots+x^{k-2}\alpha_{k-2}I+x^{k-1}\alpha_{k-1}I+x^kI$$

ניקח איפוא: $B_{k-1}=I$

(כך ש $B_{k-2}-A\underset{=I}{B_{k-1}}=\alpha_{k-1}I$) $\quad B_{k-2}=\alpha_{k-1}I+A$

(כך ש $B_{k-3}-AB_{k-2}=\alpha_{k-2}I$) $\quad B_{k-3}=\alpha_{k-2}I+\alpha_{k-1}A+A^2$

$\vdots$

(כך ש $B_0-AB_1=\alpha_1I$) $\quad B_0=\alpha_1I+\alpha_2A+\dots+\alpha_{k-1}A^{k-2}+A^{k-1}$

כעת חייבים לוודא שמתקיים גם $-AB_0=\alpha_0I$:

$$\alpha_0I+AB_0\overset{\text{הצבת } B_0 \text{ שבחרנו}}{=}\alpha_0I+\alpha_1A+\alpha_2A^2+\dots+\alpha_{k-1}A^{k-1}+A^k=m_A(A)=0$$

הגענו!

לסיכום, יש מטריצה $B(x)$ שרכיביה ב $\mathbb{F}[x]$, כך ש $(xI-A)\cdot B(x)=m_A(x)\cdot I$.

נפעיל דטרמיננטה על שני האגפים:

$$p_A(x)\cdot q(x)=|xI-A|\cdot\underbrace{|B(x)|}_{q(x)\in\mathbb{F}[x]}=|(xI-A)B(x)|=|m_A(x)\cdot I|=(m_A(x))^n.$$

לכן $p_A(x)\,\big|\,(m_A(x))^n$. //