

חשבון אינפי 2 למדמ"ח
שיעור 2: שיטות אינטגרציה לאינטגרל הלא מסוים

הגדרה: $F(x)$ תיקרא פונקציה קדומה של $f(x)$ בקבוצה A אם מתקיים
 $\forall x \in A : F'(x) = f(x)$

הגדרה: האינטגרל הלא מסוים של $f = f(x)$ הוא אוסף כל הפונקציות הקדומות של f . סימון: $\int f(x)dx$.

למשל: פונקציה קדומה של $f(x) = x$ בכל הישר היא $F(x) = \frac{x^2}{2}$.

משפט: תהי $f(x)$ פונקציה. אם $F(x), G(x)$ שתי פונקציות קדומות שלה בקבוצה A אזי מתקיים שם $F(x) = G(x) + c$ כאשר c קבוע.

למשל: גם $G(x) = \frac{x^2}{2} + 2$ פונקציה קדומה של x . וכל פונקציה קדומה של x היא מהצורה $\frac{x^2}{2} + c$.

טבלה 1: טבלת פונקציות קדומות

$f(x)$	$F(x)$
0	1
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
x^{-1}	$\ln x $
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	\sqrt{x}
$a^x, a > 0$	$\frac{1}{\ln(a)}a^x$
e^x	e^x
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$

הערה: בכל התשובות צריך להוסיף את הקבוע c לתשובה הסופית.

$$f(x) = \frac{2x^4}{1+x^2} \quad \text{דוגמא 1:}$$

פתרון:

$$f(x) = 2 \frac{x^4 - 1 + 1}{1 + x^2} = 2 \frac{x^4 - 1}{1 + x^2} + 2 \frac{1}{1 + x^2} = 2(x^2 - 1) + 2 \frac{1}{1 + x^2}$$

ולכן

$$\int f(x) dx = 2 \int (x^2 - 1) dx + 2 \int \frac{1}{1 + x^2} dx = 2 \left(\frac{x^3}{3} - x \right) + 2 \arctan(x) + c.$$

שיטת ההצבה

לפי כלל השרשרת מתקיים

$$(F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

ולכן

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int (F(g(x)))' dx = F(g(x)) + c$$

1. השלמה לריבוע

$$\int \frac{dx}{x^2 + x + 1\frac{1}{4}} = \int \frac{dx}{(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1\frac{1}{4}}$$
$$= [t = x + \frac{1}{2} \Rightarrow dt = dx] = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \arctan(t) + c = \arctan\left(x + \frac{1}{2}\right) + c$$

2.

$$\int x e^{x^2} dx = [t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx] = \int e^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} e^t + c = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

$$\int \tan(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = [t = \cos(x) \Rightarrow dt = -\sin(x) dx] = \int \frac{1}{t} (-dt) = -\ln |t| + c = -\ln |\cos(x)| + c \quad .3$$

$$\int x^3 (3x^2 - 1)^{17} dx = [t = 3x^2 - 1 \Rightarrow dt = 6x dx] = \int \left(\frac{t+1}{3}\right) t^{17} \frac{dt}{6} = \frac{1}{18} \int t^{18} + t^{17} dt = \frac{1}{18} \left(\frac{t^{19}}{19} + \frac{t^{18}}{18}\right) + c = \dots \quad .4$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \quad a > 0 = \int \frac{1}{\sqrt{a^2} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} dx = [t = \frac{x}{a} \Rightarrow dt = \frac{1}{a} dx] = \frac{1}{a} \int \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} a dt = \frac{a}{a} \arcsin(t) + c = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad .5$$

$$\int \sin^{42}(x) \cos(x) dx = [t = \sin(x), \Rightarrow dt = \cos(x) dx] = \int t^{42} dt = \frac{t^{43}}{43} + c = \frac{\sin^{43}(x)}{43} + c \quad .6$$

אינטגרציה בחלקים

מחוקי הגזירה מתקיים $(f \cdot g)' = f'g + g'f$ ולכן

$$\int g'(x) f(x) dx =$$

$$\int [f(x)g(x)]' dx - \int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

$$\int x \ln(x) dx = [g'(x) = x, f(x) = \ln(x)] \quad .1$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4} + c$$

$$\int x \arctan(x) dx = [u' = x, v = \arctan(x)] = \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{1+x^2} dx \quad .2$$

$$= \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1 - 1}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} (x - \arctan(x)) + c$$

$$F(x) = \int e^x \cos(x) dx = [g'(x) = \cos(x), f(x) = e^x] = e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x) dx \quad .3$$

$$= [g'(x) = \sin(x), f(x) = e^x] = e^x \sin(x) - (-e^x \cos(x) - \int -e^x \cos(x) dx)$$

$$= e^x (\sin(x) + \cos(x)) - F(x)$$

ומכאן ש

$$2F(x) = e^x (\sin(x) + \cos(x))$$

ולכן

$$F(x) = \frac{e^x (\sin(x) + \cos(x))}{2}$$

$$I_m(x) = \int \frac{1}{(1+x^2)^m} dx \quad .4$$

$$I_m(x) = [g' = 1, f = \frac{1}{(1+x^2)^m}] = \int 1 \cdot \frac{1}{(1+x^2)^m} dx =$$

$$x \frac{1}{(1+x^2)^m} - \int \frac{-x(2mx)}{(1+x^2)^{m+1}} dx = \frac{x}{(1+x^2)^m} + 2m \int \frac{x^2 + 1 - 1}{(1+x^2)^{m+1}} dx$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)^m} + 2m(I_m - I_{m+1})$$

ולכן

$$I_{m+1} = \frac{x}{2m(1+x^2)^m} + I_m \frac{(2m-1)}{2m}$$

$$I_1 = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c \quad \text{עם תנאי התחלה}$$

הצבות טריגונומטיות

1. מכפלה של \cos, \sin שאחד מהם בחזקה אי-זוגית, במקרה זה נבצע הצבה טריגונומטרית $t = \cos(x)$ או $t = \sin(x)$:

$$\int \frac{\sin(x)}{\sqrt{2 - \cos^2(x)}} dx = [t = \cos(x) \Rightarrow dt =$$

$$- \sin(x) dx] = \int \frac{-dt}{\sqrt{2-t^2}} = -\arcsin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + c = -\arcsin\left(\frac{\cos(x)}{\sqrt{2}}\right) + c$$

2. אם שניהם זוגיים ניתן לפעמים לפשט את הביטוי בעזרת זהויות טריגונומטריות

$$\int \sin^2(x) \cos^4(x) dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{8} \int (1 - \cos(2x))(1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x)) dx$$

$$= \frac{1}{8} \int 1 + \cos(2x) + \cos^2(2x) - 2\cos^2(2x) - \cos^3(2x) dx$$

$$= \frac{1}{8} \int 1 + \cos(2x) + \frac{1 + \cos(4x)}{2} - 2 \frac{1 + \cos(4x)}{2} - \frac{1 + \cos(4x)}{2} \cos(2x) dx$$

תמשיכו לבד (בעזרת הנוסחה $\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}(\cos(A+B) + \cos(A-B))$)

3. שימוש בזהות $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$

$$(a > 0) \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = [x = a \sin(t) \rightarrow dx = a \cos(t) dt,$$

$$\begin{aligned}
 dx > 0 \rightarrow \cos(t) > 0] &= \int a\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2(t)} \cos(t) dt = \\
 a^2 \int \sqrt{\cos^2(t)} \cos(t) dt &= a^2 \int \cos^2(t) dt = a^2 \int \frac{1}{2} + \frac{\cos(2t)}{2} dt \\
 = a^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right) + c &= a^2 \left(\frac{\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)}{2} + \frac{\sin\left(2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right)}{4} \right) + c
 \end{aligned}$$

אפשר לפשט את הביטוי האחרון אם משתמשים בזהות $\sin(2x) = 2 \cos(x) \sin(x)$

4. הצבה אוניברסלית - $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ ואז

$$dt = \frac{\frac{1}{2} \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} dx = \frac{1}{2}(1+t^2) dx \rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\cos(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin(x) = 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2}$$

דוגמא

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{1 + \sin(x) + \cos(x)} &= \int \frac{\frac{2}{1+t^2} dt}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{2+2t} \\
 &= \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| + c = \ln\left|1 + \tan\frac{x}{2}\right| + c.
 \end{aligned}$$

5. חיסול שורשים בעזרת פונקציות טריגונומטריות:

- אם באינטגרל מופיע הביטוי $\sqrt{a^2 - x^2}$ נציב $x = a \sin(t)$ או $x = a \cos(t)$
- אם באינטגרל מופיע הביטוי $\sqrt{x^2 - a^2}$ נציב $x = \frac{a}{\sin(t)}$ או $x = \frac{a}{\cos(t)}$
- אם באינטגרל מופיע הביטוי $\sqrt{a^2 + x^2}$ נציב $x = a \tan(t)$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} = \left[x = \frac{1}{\cos(t)}, dx = \frac{\sin(t) dt}{\cos^2(t)} \right] = \int \frac{\frac{\sin(t) dt}{\cos^2(t)}}{\frac{1}{\cos^2(t)} \sqrt{\frac{1}{\cos^2(t)} - 1}}$$

$$= \int \frac{\sin(t) dt}{\sqrt{\frac{1 - \cos^2(t)}{\cos^2(t)}}} = \int \frac{\sin(t) dt}{\sqrt{\frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}}} = (dx > 0 \rightarrow \sin(t) > 0)$$

$$= \int \sqrt{\cos^2(t)} dt = \int_* \cos(t) dt = \sin(t) + c = \sqrt{1 - \cos^2(t)} + c$$

$$\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + c = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} + c$$

* : הנחנו ש- $\cos(t) > 0$, אם היינו מניחים ש- $\cos(t) < 0$ היינו מקבלים

$$-\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + c = -\frac{\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{x^2}} + c = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} + c$$

כאשר השתמשנו בעובדה ש- $\sqrt{x^2} = -x$ כי $x = \frac{1}{\cos(t)} < 0$.