מועד א' באינפי 3 תשע"ז

27 בפברואר 2017

1. תהי $E\subset\mathbb{R}^n$. נניח כי לכל כיסוי של E על ידי קבוצות פתוחות קיים תת־כיסוי סופי. הוכיחו שהקבוצה E היא סגורה וחסומה.

<u>פתרון:</u>

בעצם, אנו צריכים להוכיח "קומפקטית $\Longleftarrow$סגורה וחסומה".

ראשית, נראה שהקבוצה חסומה. יהי $x\in E$. נתבונן באוסף הכדורים הפתוחים:

$$B=\left\{B\left(x,r\right)|r\in\mathbb{R}^{+}\right\}$$

זהו כיסוי של E (זהו כיסוי כל המרחב) ולכן קיים לו תת־כיסוי סופי.

כלומר, קיימים $r_1,\ldots,r_n\in\mathbb{R}^{+}$ כך ש: $\left\{B\left(x,r_i\right)|1\leq i\leq n\right\}$ כיסוי של E.

מכיוון שלכדורים אותו מרכז, הם מוכלים בכדור עם הרדיוס הכי גדול.

נסמן $R=\max\left\{r_i\right\}$ ונקבל: $E\subseteq B\left(x,R\right)$ ולכן E חסומה.

שנית, נראה שהקבוצה סגורה. לפי ההגדרה, מספיק להראות שהמשלים E^c היא פתוחה.

יהי $x\in E^c$; נראה שקיים ε עבורו $B\left(x,\varepsilon\right)\subseteq E^c$ (ואז E^c פתוחה).

אם כן, לכל $y\in E$, מכיוון ש: $x\notin E$ מתקיים: $\|x-y\|\neq 0$.

נסמן: $r_y=\frac{1}{2}\|x-y\|$, ונתבונן בכדורים: $B\left(y,r_y\right)$. הם מהווים כיסוי פתוח של E.

מהנתון, קיים לכיסוי זה תת־כיסוי סופי; קיימים $y_1,\ldots,y_n\in E$ עבורם:

$$E\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}B\left(y_i,r_{y_i}\right)$$

כעת, נסמן:

$$r=\min_{1\leq i\leq n}r_{y_i}$$

נזכור שזהו מספר חיובי. נניח בשלילה שקיימת $z\in B\left(x,r\right)$ המקיימת: $z\in E$.

מהגדרת r, קיים j עבורו: $z\in B\left(y_j,r_{y_j}\right)$. לפיכך:

$$\|x-y_j\|\leq\|x-z\|+\|z-y_j\|<r+r_{y_j}\leq2r_{y_j}=\|x-y_j\|$$

בום! פאק! סתירה!

לכן לא קיימת z כזו. כלומר, $B\left(x,r\right)\cap E=\emptyset$ ולכן: $B\left(x,r\right)\subseteq E^c$.

אם כן, r הוא ה$-\varepsilon$ המתאים. E^c פתוחה ולכן E סגורה.

2. האם הפונקציה:

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} & \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\ 0 & \left(x,y\right)=\left(0,0\right)\end{cases}$$

דיפרנציאבילית בנקודה $\left(0,0\right)$?

<u>פתרון:</u>

נגזור לפי ההגדרה, כמובן:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(0,0\right)=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{f\left(t,0\right)-f\left(0,0\right)}{t}=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{\frac{t^3+0^4}{t^2+0^2}-0}{t}=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(0,0\right)=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{f\left(0,t\right)-f\left(0,0\right)}{t}=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{\frac{0+t^4}{0+t^2}-0}{t}=0$$

כדי שהפונקציה תהיה דיפרנציאבילית ב$-\left(0,0\right)$, נדרוש:

$$f\left(h_1,h_2\right)=f\left(0,0\right)+\frac{\partial f}{\partial x}\left(0,0\right)h_1+\frac{\partial f}{\partial y}\left(0,0\right)h_2+o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)$$

כלומר:

$$\frac{h_1^3+h_2^4}{h_1^2+h_2^2}=h_1+o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)$$

ולכן, השאלה היא האם:

$$\lim_{h_1^2+h_2^2\longrightarrow 0}\frac{\frac{h_1^3+h_2^4}{h_1^2+h_2^2}-h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\lim_{h_1^2+h_2^2\longrightarrow 0}\frac{h_2^4-h_1h_2^2}{\left(h_1^2+h_2^2\right)^{\frac{3}{2}}}=0$$

במסלול $h_1=h_2$ נקבל:

$$\lim_{h_1^2+h_2^2\longrightarrow 0}\frac{h_2^4-h_1h_2^2}{\left(h_1^2+h_2^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\lim_{h_1\longrightarrow 0}\frac{h_1^4-h_1^3}{\left(2h_1^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\lim_{h_1\longrightarrow 0}\frac{h_1^3\left(h_1-1\right)}{\sqrt{8}h_1^3}=\lim_{h_1\longrightarrow 0}\frac{h_1-1}{\sqrt{8}}=-\frac{1}{\sqrt{8}}$$

קיבלנו גבול שונה מ-0 ולכן 0 אינו הגבול.

לכן הפונקציה אינה דיפרנציאבילית.

3. מצאו מלבן (עם צלעות מקבילות לצירים) בעל שטח מקסימלי החסום באליפסה $2x^2+y^2=1$.

<u>פתרון:</u>

נסמן את הנקודה שבה המלבן חותך את האליפסה ברביע הראשון ב$-(x,y)$.

השטח של חלק המלבן שנמצא ברביע הראשון הוא xy.

מכיוון צלעות המלבן מקבילות לצירים, שטח כל המלבן הוא $A=4xy$.

נגזור לפי x (תוך כדי שאנו מתייחסים אל y כאל פונקציה של x) ונשווה ל-0:

$$\frac{dA}{dx}=4y+4x\frac{dy}{dx}=0$$

את $\frac{dy}{dx}$ נמצא מתוך משוואת האליפסה: $2x^2+y^2=1$. נגזור אותה באותו האופן ונקבל:

$$4x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

כלומר: $\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{y}$. נחזור למשוואה הראשונה:

$$\frac{dA}{dx}=4y-\frac{8x^2}{y}=0$$

נכפול ב$-y$:

$$4y^2-8x^2=0$$

ממשוואת האליפסה, $y^2=1-2x^2$, ולכן:

$$4\left(1-2x^2\right)-8x^2=0\Longrightarrow\frac{1}{4}=x^2$$

ולכן $x=\frac{1}{2}$ (זכרו שאנו ברביע הראשון). ממשוואת האליפסה: $y^2=1-\frac{1}{2}$ ולכן: $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

מכאן אפשר למצוא את שאר קודקודי המלבן: $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

ראיתם? בלי לגראנז' בלי כלום.

אפשר גם עם לגראנז'; הפונקציה היא $4xy$, האילוץ הוא: $2x^2+y^2-1=0$, ולכן הלגראנז'יאן היא:

$$L\left(x,y,\lambda\right)=4xy+\lambda\left(2x^2+y^2-1\right)$$

נגזור ונשווה לאפס:

$$\begin{cases}L_x=4y+4\lambda x=0\\L_y=4x+2\lambda y=0\\L_\lambda=2x^2+y^2-1=0\end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה, $\lambda=-\frac{y}{x}$. נציב זאת במשוואה השנייה ונקבל:

$$4x-\frac{2y^2}{x}=0$$

נכפיל ב$-x$ ואחרי העברת אגפים וצמצום ב-2 נקבל $y^2 = 2x^2$.

נציב זאת במשוואה השלישית ונקבל:

$$2x^2 + 2x^2 - 1 = 0$$

ולכן $x = \frac{1}{2}$ ומכאן $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, כמו בדרך הראשונה.

4. חשבו:

$$\iiint\limits_E \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$$

כאשר: $E = \left\{(x,y,z)\left|x^2+y^2+z^2 \le z\right.\right\}$.

<u>פתרון:</u>

נעבור לקואורדינטות כדוריות:

$$x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta$$

התחום שלנו מקיים:

$$r^2 \le r\cos\theta$$

מכאן, אפשר להסיק ש: $0 \le r \le \cos\theta$, ולכן גם: $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

היעקוביאן היא $r^2\sin\theta$, ולכן:

$$\iiint\limits_E \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\cos\theta} r\cdot r^2\sin\theta drd\theta d\phi =$$

$$= 2\pi\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^4}{4}\sin\theta\Big|_{r=0}^{r=\cos\theta} d\theta = \frac{\pi}{2}\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\sin\theta d\theta =$$

$$-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\cos^5\theta}{5}\Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{10}$$

5. תהי $U\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה וחסומה, ותהי $f:\overline{U}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ב־$\overline{U}$ ודיפרנציאבילית ב־U.

נניח כי f מתאפסת על השפה ∂U. הוכיחו כי קיים $x\in U$ עבורו $\nabla f(x)=0$.

פתרון:

ראשית, U חסומה. לכן קיימים $x\in U, r\in\mathbb{R}^+$ עבורם: $U\subseteq B(x,r)$.

לכן, $\overline{U}\subseteq B[x,r]\subset B(x,r+1)$ ולכן גם $\overline{U}$ חסומה.

$\overline{U}$ גם סגורה, ולכן לפי משפט היינה־בורל $\overline{U}$ קומפקטית.

f רציפה בקבוצה $\overline{U}$ ולכן לפי משפט ויירשטראס מקבלת שם מינימום ומקסימום.

כלומר, קיימות $x_1,x_2\in\overline{U}$ כך שלכל $y\in\overline{U}$ מתקיים: $f(x_1)\leq f(y)\leq f(x_2)$.

מכיוון ש: $U\subset\overline{U}$, לכל $y\in U$ מתקיים: $f(x_1)\leq f(y)\leq f(x_2)$.

כעת, אם הנקודה x_1 נמצאת ב־U, מכיוון שזו נקודת קיצון והפונקציה f דיפרנציאבילית ב־U, מתקיים:

$$\nabla f(x_1)=0$$

באופן דומה אם x_2 נמצאת ב־U אז $\nabla f(x_2)=0$.

אחרת, $x_1,x_2\notin U$, כלומר: $x_1,x_2\in\overline{U}\backslash U$. מכיוון ש־$U$ פתוחה, היא שווה לפנים שלה, ולכן:

$$\overline{U}\backslash U=\partial U$$

כלומר, הנקודות x_1,x_2 נמצאות בשפה. לפי הנתון, $f(x_1)=f(x_2)=0$.

מכיוון שהנקודות x_1,x_2 הן נקודות הקיצון של f בקבוצה $\overline{U}$, נקבל שלכל $y\in\overline{U}$, $f(y)=0$, כלומר f קבועה על $\overline{U}$ ובפרט על U.

במצב כזה, $\nabla f\left(x\right)=0$ לכל $x\in U$.

בכל אופן קיימת $x\in U$ כנדרש.