תרגיל 2

13 במרץ 2018

שאלה 1

חשב את האינטגרלים הבאים בעזרת אינטגרלים מידיים:

א) $\int \frac{x^2-3x+2}{x-3}dx$

הערה: זה אינטגרל של פונקציה רציונאלית נלמד רק בהמשך לחשב אותו

ב) $\int cos(3x)cos(7x)dx$ (רמז: פשטו את הביטוי בעמצאות זהות טריגונומטרית של מכפלה של קוסינוסים)

פתרון:
נשתמש בזהות הבאה: $cos(x) \cdot cos(y) = \frac{1}{2}(cos(x+y) + cos(x-y))$
$$\int cos(3x) \cdot cos(7x)dx = \frac{1}{2}\int (cos(10x)+cos(4x))dx = \frac{1}{2}\left(\int cos(10x)dx + \int cos(4x)dx\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{sin(10x)}{10} + \frac{sin(4x)}{4}\right) + C$$

ג) $\int \left(\sqrt[7]{x^5}+2\right)^2 dx$ (רמז: פשטו את הביטוי על ידי שימוש בנוסחת הכפל המקוצר)

פתרון:
נשתמש בנוסחת הכפל המקוצר ונקבל את הביטוי הבא:
$$\int (\sqrt[7]{x^{10}} + 4 \cdot \sqrt[7]{x^5} + 4)dx = \int \sqrt[7]{x^{10}}dx + \int 4 \cdot \sqrt[7]{x^5}dx + \int 4dx =$$
$$= \frac{10}{17} \cdot \sqrt[7]{x^{17}} + \frac{7}{3}\sqrt[7]{x^{12}} + 4x + C$$

ד) $\int \frac{16^x-3^{2x}}{4^x-3^x}dx$ (רמז: פשטו את המונה על ידי נוסחת הכפל המקוצר)

פתרון:
$$\int \frac{4^{2x}-3^{2X}}{4^X-3^X}dx = \int \frac{(4^x-3^x)(4^x+3^x)}{4^x-3^x}dx = \int (4^x+3^x)dx = \frac{4^x}{ln(4)} + \frac{3^x}{ln(3)} + C$$

ה) $\int (3-x^2)^3 dx$

פתרון:
נעזר בנוסחתהכפל המקוצר ונקבל:
$$9x - 9x^3 + 9 \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + C$$

ו) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$ (רמז: פצלו את האינטגרל לסכום של שני איטגרלים)

פתרון:

נפצל את הביטוי שבסוגריים ונקבל
$\int(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})dx=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+2\cdot\sqrt{x}+C$

ז) $\int(e^{-x}+e^{-2x})dx$

פתרון:
מיידי לפי טבלה של האינטגרלים המידיים:
$-e^{-x}-\frac{e^{-2x}}{2}+C$

שאלה 2

חשבו את האיטגרלים הבאים בשיטת האינטגרציה בחלקים:

א) $\int ln(x^2+1)dx$

פתרון:
נסמן: $f^{'}=1, f=x$
$g=ln(x^2+1), g^{'}=\frac{2x}{x^2+1}$
ולכן נקבל: $xln(x^2+1)-2(x-arctan(x))+C$

ב) $\int sin^2(x)cos^2(x)dx$

פתרון:
נשתמש בזהות כפולה ונקבל:
$\frac{1}{4}\cdot\int sin^2(2x)dx=\frac{1}{4}\cdot\int(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}cos(4x))dx=\frac{1}{4}\cdot(\frac{1}{2}x-\frac{sin(4x)}{8})+C$

ג) $\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}$

פתרון:
נתבונן קודם ב־$\int\frac{dx}{1+x^2}$:
נסמן: $f^{'}=1, g=\frac{1}{1+x^2}$
$f=x, g^{'}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$
ולכן נקבל :
$\int\frac{dx}{1+x^2}=\frac{x}{1+x^2}+2\cdot\int\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx=$
$=\frac{x}{1+x^2}+2\int\frac{1+x^2}{(1+x^2)^2}dx-2\int\frac{1}{(1+x^2)^2}dx=$
$=\frac{x}{1+x^2}+2\int\frac{dx}{1+x^2}-2\int\frac{dx}{(1+x^2)}dx$
נעביר אגף ונקבל כי
$2\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\frac{x}{1+x^2}+\int\frac{dx}{1+x^2}=\frac{x}{1+x^2}+arctan(x)+C$

ד) $\int x^k ln(x)dx$

פתרון:
נסמן $f^{'}=x^k, g=ln(x)$
$f=\frac{x^{k|+1}}{k+1}, g^{'}=\frac{1}{x}$
$\frac{x^{k+1}}{k+1}ln(x)-\frac{1}{k+1}\int x^k dx=\frac{x^{k+1}}{k+1}ln(x)-\frac{x^{k+1}}{(k+1)^2}+C$

ה) $\int 2xarctan(x)dx$

פתרון:

נסמן $f^{'} = x, g = arctan(x)$

$f = \frac{x^2}{2}, g^{'} = \frac{1}{1+x^2}$

$2(\frac{x^2}{2}arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx) = 2(\frac{x^2}{2}arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx) =$

$= x^2arctan(x) - \int dx + \int \frac{dx}{x^2+1} = x^2arctan(x) - x + arctan(x) + C$

ו) $\int sin(ln(x))dx$

פתרון:

$f^{'} = 1, g = sin(ln(x))$

$f = x, g^{'} = \frac{cos(ln(x))}{x}$

$xsin(ln(x)) - \int cos(ln(x))dx$

$f^{'} = 1, g = cos(ln(x))$

$f = x, g^{'} = \frac{-sin(ln(x))}{x}$

$= xsin(ln(x)) - (xcos(ln(x) + \int sin(ln(x))dx$

נעביר אגף, נצמצם ב־2 ונקבל:

$\int sin(ln(x))dx = \frac{1}{2}x(sin(ln(x)) - cos(ln(x))) + C$