המשך הדיון בקבוצות קומפקטיות

(X,d) מרחב מטרי. $E \subseteq X$ קומפקטית

משפט 1

אם E קבוצה קומפקטית, אזי לכל תת קבוצה F אין-סופית של E יש נקודת גבול בE.

הוכחה (בדרך השלילה)

נניח שקיימת קבוצה אין-סופית $F \subseteq E$ שאין לה נקודת גבול בE. כל $x \in E$ היא לא נקודת גבול של F. כלומר, קיים כדור $B(x, r_x)$ שבו אין נקודות של F השונות מx.
$\{B(x,r_x)\}_{x\in E}$ כיסוי פתוח של E. בגלל הקומפקטיות של E, קיימים מס' סופי של נקודות $x_1,...x_n \in E$ כך ש$(F \subseteq) E \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, r_{x_j})$. כל כדור כזה לא מכיל נקודות של F (פרט אולי לx), לכן האיחוד מכיל לכל היותר n נק' של F.
מסקנה - F מכילה לכל היותר n נקודות. סתירה לאינסופיות של F.

משפט 2

אם E קומפקטית, אזי כל תת-קבוצה סגורה שלה F היא קומפקטית.

הוכחה

יהי $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של F. F^c קבוצה פתוחה. $E \subseteq \{V_\alpha\}_{\alpha\in I} \cup \{F^c\}$, שכן כל נקודה של E אם היא בF היא נמצאת בכיסוי שלו, ואם לא היא נמצאת בF^c. כיוון שE קומפקטית, קיימים $\alpha_1,...\alpha_n \in I$ כך ש$(F \subseteq) E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha_i} \cup F^c$, אבל $F \cap F^c = \emptyset$, לכן $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha_i}$, כלומר F קומפקטית. מש"ל.

הגדרה

קבוצה E במ"מ נקראת קב' חסומה אם קיים כדור $B(p,R)$ המכיל את E.

משפט 3

קב' קומפקטית במ"מ היא חסומה.

הוכחה

תהי E קבוצה קומפקטית. נקבע נק' p שרירותית בX. $\{B(x,1)\}_{x\in E}$ הוא כיסוי פתוח של E. כיוון שE קומפ' קיימים $x_1,...x_n \in E$ כך ש$E \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j,1)$. $R \doteqdot 1 + \max_{1\le j\le n} d(x_j,p)$

טענה: $E \subseteq B(p,R)$(וזה מוכיח שE קב' חסומה)

באמת: אם $x \in E$ קיים j כך ש$x \in B(x_j,1)$

$$d(x,p) \le \underbrace{d(x,x_j)}_{<1} + \underbrace{d(x_j,p)}_{\le \max_{1\le i\le n}(x_i,p)} < 1 + \max(\cdots) \doteqdot R$$

מסקנה משני המשפטים הקודמים

קבוצה קומפקטית במ"מ היא קבוצה סגורה וחסומה.
ההפך בד"כ לא נכון, אולם ב$\mathbb{R}^k$, ההפך ג"כ נכון.

1) הכללת הלמה של קנטור ל$\mathbb{R}^k$

הגדרה

תא(cell) ב$\mathbb{R}^k$ הוא מכפלה קרטזית של k קטעים סגורים.

$$I = \prod_{j=1}^{k} [a_j, b_j]$$

$[a_j,b_j]$ - "ההטל" של התא I על הציר x_j.

הלמה של קנטור ב$\mathbb{R}^k$

נניח שI_j הם תאים ב$\mathbb{R}^k$ כך ש$I_{j+1} \subseteq I_j$ לכל $j = 1,2,...$. אזי $\bigcap_{j=1}^{\infty} I_j \neq \emptyset$

הוכחה

נסמן $I_j = \prod_{i=1}^{k}\left[a_i^j, b_i^j\right]$. עבור i קבוע, ההיטלים מקיימים $\left[a_i^{j+1}, b_i^{j+1}\right] \subseteq \left[a_i^j, b_i^j\right]$ לכל $j = 1,2,...$. לכן לפי הלמה של קנטור בממד אחד, קיימת נקודה משותפת x_i לכל הקטעים הנ"ל. ניקח $x = (x_1, ... x_k)$, היא משותפת לכל התחום - $x \in \bigcap_{j=1}^{\infty} I_j$ כי $x_i \in \left[a_i^j, b_i^j\right]$ לכל $j = 1,2,...$

משפט

כל תא ב$\mathbb{R}^k$ הוא קב' קומפקטית.

הוכחה

יהי I תא ב$\mathbb{R}^k$. צל"ה I קומפקטי: ז"א לכל כיסוי פתוח של I יש תת כיסוי סופי. נראה זאת בדרך השלילה. כלומר: נניח שקיים כיסוי פתוח $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ של I שאין לו תת כיסוי סופי. צריך להגיע לסתירה.

נחלק כל היטל של I לשני קטעים חלקיים ע"י נקודת האמצע של הקטע: $[a,b] = [a,c] \cup [c,b]\,, c = \frac{a+b}{2}$. I הוא איחוד של 2^k תאים חלקיים. לפחות אחד התאים החלקיים (נקרא לו I_1) אינו ניתן לכיסוי ע"י מספר סופי של V_αים. נחזור על תהליך זה עם I_1, נקבל I_2 תא חלקי של I_1 שאינו ניתן לכיסוי ע"י מס' סופי של V_αים.

באופן אינדוקטיבי, נקבל סדרת תאים I_j עם התכונות הבאות:

1. $I \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots$
2. I_j לא ניתן לכיסוי ע"י מספר סופי של V_αים.
3. אם $\delta_j = \mathrm{diam} I_j$ ו$\delta = \mathrm{diam} I$ אז $\delta_j = \frac{\delta}{2^j}$.

לפי 1 והלמה של קנטור יש נקודה משותפת x לכל הI_j: $x \in \bigcap_{j=1}^{\infty} I_j \subseteq I$. קיים לכן $\alpha \in A$ כך ש$x \in V_\alpha$.

כיוון שV_α קבוצה פתוחה קיים כדור $B(x,r) \subseteq V_\alpha$.

כיוון ש$\delta_j = \frac{\delta}{2^j} \to 0$ קיים j(נקבע אותו) כך ש$\delta_j < r$.

נסתכל על I_j(עבור j הנ"ל). תהי $y \in I_j$

$$d(y,x) \le \mathrm{diam} I_j \doteqdot \delta_j < r$$

$$y \in B(x,r) \subseteq V_\alpha$$

$$\boxed{I_j \subseteq V_\alpha}$$

סתירה לתכונה 2

משפט(Heine-Borel)

ב$\mathbb{R}^k$, קבוצה E היא קומפקטית אם ורק אם היא סגורה וחסומה.

הוכחה

א) אם E קומפקטית במ"מ כלשהו(במיוחד ב$\mathbb{R}^k$), ראינו שE סגורה וחסומה.

ב) להפך, נניח שE סגורה וחסומה. כיוון שE חסומה, קיים כדור $B(p,R)$ כך ש$E \subseteq B(p,R)$.

$$|x_i - a_i| \le \max_{1\le i\le k} |x_i - a_i| \doteqdot \|x-a\|_\infty$$

$$\le \|x-a\|_p < R$$

$$a_i - R < x_i < a_i + R$$

$$x \in \prod_{i=1}^{k} [a_i - R, a_i + R] \doteqdot I$$

$$\boxed{E \subseteq I}$$

כלומר: E היא תת קבוצה סגורה(נתון) של קבוצה קומפקטית I(המשפט הקודם). לכן E היא קומפקטית(לפי משפט קודם האומר שתת קבוצה סגורה של קב' קומפקטית היא קב' קומפקטית). מש"ל.

תוצאה של משפט קודם

בכל מרחב מטרי, החיתוך של קבוצה סגורה וקבוצה קומפקטית הוא קבוצה קומקפטית.

הוכחה

E סגורה. $E \cap F \subseteq E$ סגורה(חיתוך של סגורות) לכן $E \cap F$ קומפקטית.

תוצאה(של היינה-בורל): משפט בולצנו ווירשטרס

ב$\mathbb{R}^k$, לכל קבוצה אין סופית וחסומה קיימת נקודת גבול(ב$\mathbb{R}^k$)

הוכחה

E חסומה $\Leftarrow$ קיים תא I כך ש$E \subseteq I$(אין סופית). לכן קיימת נק' גבול של E בI. מש"ל.