<u>אלגברה מופשטת 1, תרגיל בית 3</u>

מתרגלים: סולי וישקאוצין ואדם צ'פמן. להגשה ב30.11 או ב27.11 בהתאם לשיעור התרגיל.

1) תהי חבורה אבלית G סופית כך שלכל איבר $g \in G$ השונה מאיבר היחידה מתקיים $g^2 \neq e$. חשבו את מכפלת כל האיברים ב G, כלומר $\prod_{g \in G} g$.

פיתרון:

אפשר לסדר את אברי G באופן הבא $G = \{e, a_1, a_1^{-1}, a_2, a_2^{-1}, \ldots, a_n, a_n^{-1}\}$, משום שלכל איבר בחבורה גם ההופכי שלו נמצא בחבורה, ופרט לאיבר היחידה כל איבר שונה מההפכי של עצמו. לכן מכפלת האיברים ב G היא

$$\prod_{g \in G} g = e \cdot a_1 \cdot a_1^{-1} \cdot a_2 \cdot a_2^{-1} \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a_n^{-1} = e \cdot e \cdot \ldots \cdot e = e.$$

2) הבא דוגמא לחבורה G ותת-חבורות H, K כך ש $H \cup K$ לא תת-חבורה של G.

פיתרון:

ניקח $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ עם פעולת החיבור ואת תת-החבורות $H = \mathbb{Z}_2 \times \{0\}$ ו $K = \{0\} \times \mathbb{Z}_2$. הקבוצה $H \cup K$ כוללת את $(0,1)$ ואת $(1,0)$, אך לא כוללת את $(1,1) = (1,0) + (0,1)$, כלומר הקבוצה $H \cup K$ לא סגורה לחיבור ולכן איננה תת-חבורה של G.

3) הוכח ש אם G אבלית אז $G_n=\{g\in G: g^n=e\}$ היא תת חבורה שלה.

פיתרון:

לכל $a,b\in G$ אזי $(ab)^n=a^nb^n$ בגלל האבליות. בפרט, אם $a,b\in G_n$ אזי $(ab)^n=a^nb^n=e\cdot e=e$, ולכן $ab\in G_n$, כלומר G_n סגורה לפעולת החבורה.

אם $a\in G_n$ אזי $a^{-1}=a^{n-1}$. כעת, $(a^{n-1})^n=(a^n)^{n-1}=e^{n-1}=e$ ולכן $a^{-1}=a^{n-1}\in G_n$, כלומר G_n כוללת את ההפכיים של האיברים שלה. מכאן שG_n תת-חבורה של G.

4) הוכיחו כי אם לחבורה G קיימות שתי תת-חבורות H,K כך ש$H\cup K=G$ אזי או $H=G$ או $K=G$. [הדרכה: הניחו בשלילה כי מתקיים $H\cup K=G$ עבור $H,K\neq G$. הסבירו מדוע קיימים זוג איברים $a\in H, b\in K$ כך ש $a\notin K, b\notin H$. הביטו באיבר $a\cdot b$]

פיתרון:

נניח בשלילה כי מתקיים $H\cup K=G$ עבור $H,K\neq G$. לא ייתכן כי $H\subseteq K$ משום שאז $H\cup K=K\neq G$. מאותה הסיבה לא ייתכן ש $K\subseteq H$.

לכן קיימים זוג איברים $a\in H, b\in K$ כך ש $a\notin K, b\notin H$. כעת, $ab\in G=H\cup K$, ולכן $ab\in H$ או $ab\in K$. אם $ab\in H$ אזי גם $a^{-1}(ab)\in H$. אולם $a^{-1}(ab)=b$ וזו סתירה. באופן דומה מגיעים לסתירה אם $ab\in K$.

5) תנו דוגמא לחבורה G שיש לה 3 תת-חבורות לא טריוויאליות A,B,C המקיימות $G=A\cup B\cup C$. [רמז: נסו $G=Z_2\times Z_2$]

פיתרון:

ניקח $G=Z_2\times Z_2$ ותת-חבורות $A=\{(0,0),(1,0)\}$, $B=\{(0,0),(0,1)\}$ ו-$C=\{(0,0),(1,1)\}$.